



TUGAS AKHIR - SF141501

POTENSIAL DAN TEGANGAN DAWAI QUARK STATIS DALAM REPRESENTASI SU(3)

BAYU ASLAMA ZULFIKAR AHMAD
NRP 01111440000077

Dosen Pembimbing:
Agus Purwanto, D.Sc

DEPARTEMEN FISIKA
Fakultas Ilmu Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2018



TUGAS AKHIR - SF141501

**POTENSIAL DAN TEGANGAN DAWAI QUARK
STATIS DALAM REPRESENTASI SU(3)**

BAYU ASLAMA ZULFIKAR AHMAD
NRP 01111440000077

Dosen Pembimbing:
Agus Purwanto, D.Sc

DEPARTEMEN FISIKA
Fakultas Ilmu Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2018



FINAL PROJECT - SF141501

**POTENTIALS AND STRING TENSIONS OF
STATIC QUARKS IN $SU(3)$ REPRESENTATIONS**

BAYU ASLAMA ZULFIKAR AHMAD
NRP 01111440000077

Supervisors:
Agus Purwanto, D.Sc

DEPARTMENT OF PHYSICS
Faculty of Natural Science
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2018

LEMBAR PENGESAHAN
POTENSIAL DAN TEGANGAN DAWAI
QUARK STATIS DALAM REPRESENTASI
SU(3)

*POTENTIALS AND STRING TENSIONS OF
STATIC QUARKS IN SU(3)
REPRESENTATIONS*

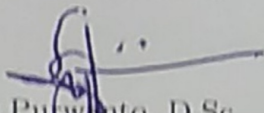
TUGAS AKHIR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada bidang Studi Fisika Teori
Program Studi S-1 Departemen Fisika
Fakultas Ilmu Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
Oleh:

BAYU ASLAMA ZULFIKAR AHMAD
NRP. 01111440000077

Menyetujui

Dosen Pembimbing


Agus Purwanto, D.Sc
NIP. 19640811 199002 1 001

Surabaya, 08 April 2019



POTENSIAL DAN TEGANGAN DAWAI QUARK STATIS DALAM REPRESENTASI $SU(3)$

Nama Mahasiswa : BAYU ASLAMA ZULFIKAR AHMAD
NRP : 01111440000077
Jurusan : Fisika FIA-ITS
Pembimbing : Agus Purwanto, D.Sc

Abstrak

Telah dilakukan analisa dan perhitungan parameter potensial quark statis yaitu tegangan dawai pada representasi fundamental dan beberapa representasi yang lebih tinggi (6 dan 8). Tegangan dawai dihitung dengan putaran Wilson pada teori Gauge kisi pada $SU(3)$ Murni. Didapatkan hasil tegangan dawai pada representasi fundamental(3) dan yang lebih tinggi (6 dan 8) .

Kata-kunci: *kisi gauge, potensial, quark statis, $SU(3)$ murni, tegangan dawai*

POTENTIALS AND STRING TENSIONS OF STATIC QUARKS IN $SU(3)$ REPRESENTATIONS

Name : BAYU ASLAMA ZULFIKAR AHMAD
NRP : 01111440000077
Department : Physics FIA-ITS
Supervisor : Agus Purwanto, D.Sc

Abstract

Have been done analyzation and calculation of parameter of potential of static quark as the string tension in fundamental and higher representation (6 and 8). The string tension calculated by a Wilson Loops in pure $SU(3)$ lattice gauge theory. In this calculation we get string tension in fundamental (3) and higher (6 and 8) representation.

Keywords: *lattice gauge, potential, static quark, pure $SU(3)$, string tension*

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah Tuhan Yang Menciptakan semesta alam, sebuah kalimat yang penulis ucapkan kepada satu-satunya Tuhan yang berhak disembah, yaitu Allah Subhanahu Wa Ta'ala, karena atas pertolongan dan karunia-Nya yang begitu besar sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul:

POTENSIAL DAN TEGANGAN DAWAI QUARK STATIS DALAM REPRESENTASI SU(3)

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Fisika FMIPA ITS.

Dalam penulisan Tugas Akhir ini, dapat terselesaikan dengan baik berkat adanya bantuan berupa taufik dan pertolongan dari Allah kemudian bantuan serta bimbingan dari berbagai pihak. Disampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu atas terselesaikannya Tugas Akhir ini:

1. Kedua Orang Tua penulis, Bapak dan Ibu yang dengan sabar mendidik dan merawat penulis dari kecil, semoga Allah memberikan rahmat-Nya atas kebaikan beliau berdua yang begitu banyak.
2. Bapak Agus Purwanto D.Sc, selaku guru dan inspirasi bagi penulis atas prestasi dan kegigihan beliau, sehingga penulis tertarik dengan keindahan Fisika Teori.
3. Ibu Sedigheh Deldar yang telah mengizinkan penulis untuk mereview Jurnal beliau dan membantu banyak dalam pengerjaan.

4. Bapak Dr.Yono Hadi Pranomo selaku Kepala Departemen Fisika FIA ITS
5. Bapak dan Ibu Dosen yang telah sabar mengajarkan dan menurunkan ilmu beliau yang begitu berharga.
6. Sahabat dan keluarga di Laboratorium Fisika Teori, Doni,Ditho, Kasyfil,Nusur, Pak Bintoro, Pak Lila, Pak Heru, dan teman-teman pascasarjana yang bekerja bersama di laboratorium.
7. Fathimah selaku sahabat dan teman ketika SMP, yang menjadi motivasi penulis untuk pengerjaan tugas akhir ini setelah Allah kemudian orang tua penulis.
8. Teman-teman Antares Fisika'14.
9. dan semua pihak yang penulis tidak dapat sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan ini masih terdapat kekurangan, sehingga segala kritik dan saran yang sifatnya membangun sangat diharapkan untuk kesempurnaan Tugas Akhir ini. Penulis berharap Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis sendiri pada khususnya dan pembaca pada umumnya.

Surabaya, 30 Juli 2018

Bayu Aslama Zulfikar Ahmad

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iv
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vii
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan	2
1.5 Manfaat	2
1.6 Sistematika Penulisan	2
BAB II KROMODINAMIKA KUANTUM	5
2.1 Sekilas tentang Teori dalam Kromodinamika Kuantum	5
2.1.1 Teori Kurungan	5
2.1.2 Kebebasan Asimtotik	6
2.2 Aplikasi Kromodinamika Kuantum	7
BAB III TEORI KISI GAUGE	9
3.1 Integral Lintas	9
3.1.1 Integral Lintas dalam Mekanika Kuantum	9

3.1.2	Integral Lintas dalam Teori Medan Kuantum	11
3.2	Diskritisasi Kisi	17
3.3	Medan Skalar Bebas Pada Kisi	20
3.4	Fermion pada Kisi	23
3.4.1	Fermion (Polos) pada Kisi	23
3.4.2	Masalah Pengganda pada Fermion	28
3.4.3	Fermion Wilson	37
3.5	Medan Gauge Abelian Pada Kisi	42
3.5.1	Elektrodinamika Kuantum U(1)	42
3.5.2	Formulasi Kisi Elektrodinamika Kuantum	47
3.6	Medan Gauge Non Abelian Pada Kisi	52
3.6.1	Formulasi Kisi Kromodinamika Kuantum SU(3)	55
BAB IV	POTENSIAL QUARK STATIS DALAM REPRESENTASI SU(3)	59
4.1	Putaran Wilson	59
4.1.1	Putaran Wilson	59
4.1.2	Representasi Fundamental, 6 dan 8 ...	61
4.2	Potensial pada Teori Gauge Kisi	64
4.3	Metode Monte-Carlo	65
4.4	Perhitungan	66
4.4.1	Kisi Anisotropik	66
4.4.2	Pelumasan	66
4.4.3	Kode Pencocokan/ <i>Fitting</i> untuk Mendapatkan Tegangan Dawai sebagai Parameter Potensial	67
4.5	Algoritma untuk Simulasi	68
4.5.1	Aksi Kisi <i>Tadpole Improved</i>	68
4.5.2	Pelumasan	68
4.5.3	Potensial Quark Statis	69
4.6	Hasil dan Pembahasan	70

BAB V	KESIMPULAN	71
5.1	Kesimpulan	71
5.2	Saran	71
LAMPIRAN A	TEORI KISI GAUGE	79
1.1	Integral Lintas dalam Mekanika Kuantum ...	79
1.2	Bentuk Eksplisit dari $\langle x p \rangle$	83
1.3	Batas Zona Brillouin Bentuk Pertama	84
1.4	Matriks Gamma	87
1.5	Delta Dirac dalam Kisi	88
1.6	Penyebut Invers Propagator Fermion	89
1.7	Plakat pada Medan Non-Abelian	91
1.8	Metode Monte Carlo untuk Menghitung Nilai Ekspektasi sebagai Putaran Wilson	92
1.9	Potensial Quark Statis dan Tegangan Dawai .	96
1.10	Teori Grup	99
	1.10.1 Parameter Bebas SU(N)	99
	1.10.2 Aljabar Lie SU(3)	106
LAMPIRAN B	KODE UNTUK SIMULASI	107
2.1	Putaran Wilson	107
2.2	Aksi Gauge	113
2.3	Pelumasan	115
BIODATA	PENULIS	121

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Plot antara $\sin(p_\mu)a/a$ dengan p_μ dalam Zona Brillouin. Garis lurus menggambarkan bentuk kontinu.[31] . . .	36
Gambar 3.2	Plakat pada bidang $\mu\nu$. [31]	51

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Parameter Potensial dalam Fungsi Representasi	70
-----------	---	----

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada dunia Fisika Teori secara garis besar terbagi dua topik besar, yaitu partikel dan kosmologi. Alam Partikel yang begitu indah dengan kerumitannya dalam pemahaman matematis dan fisis, yang melahirkan teori-teori terbaru yang melengkapi wawasan umat manusia terhadap penciptaan Allah. Teori-teori tersebut berkembang dimulai dengan ditemukannya teori kuantum dan teori relativitas yang melahirkan teori medan kuantum serta beberapa teori matematis lanjut seperti integral lintas (*Path Integral*), metode Monte-Carlo dan regularisasi. Teori penara kisi (*Lattice Gauge Theory*) yang dibahas pada tugas akhir ini merupakan keluaran dari perkembangan teori medan kuantum dan integral lintas. Teori ini bekerja dengan perhitungan secara analitik dan numerik dengan metode diskritisasi kisi ruang-waktu yang dapat disimulasikan sehingga teori partikel lebih mudah dipahami. Diantara penerapannya, adalah dalam Kromodinamika Kuantum (*Quantum Chromodynamics*), Elektrodinamika Kuantum (*Quantum Electrodynamics*), supersimetri (SUSY), hingga teori Kurungan (*Confinement*).

Salah satu tujuan perumusan teori penara kisi tanpa gangguan adalah memahami fenomena kurungan seperti yang telah disebutkan. Teori kurungan menyatakan energi potensial dari pasangan quark berat statis harus meningkat secara linear sebagai dawai atau pipa aliran yang terbentuk di antara quark tersebut. Untuk representasi terkurung

$V(R) = -A/R + KR + C$, (dengan $K =$ Tegangan Dawai (*String Tension*), $R =$ Pemisahan Quark). Pada Tugas Akhir ini akan dilakukan perhitungan untuk potensial dan parameternya berupa tegangan benang terkait dengan SU(3) Murni statis dalam berbagai representasi [41].

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dari Tugas Akhir ini adalah bagaimana potensial dan parameter tegangan dawai dari representasi fundamental dan juga beberapa representasi yang lebih tinggi (6 dan 8) dalam SU(3) murni.

1.3 Batasan Masalah

Tugas Akhir ini dibatasi hanya untuk parameter potensial berupa tegangan dawai untuk representasi fundamental, 6 dan 8 dalam SU(3) murni dengan putaran Wilson tanpa dilakukan simulasi.

1.4 Tujuan

Tujuan yang akan diperoleh dalam Tugas Akhir ini adalah mendapatkan hasil parameter potensial berupa tegangan dawai dari sumber statis dasar dan juga beberapa representasi yang lebih tinggi dalam SU(3) murni secara analitik dan numerik.

1.5 Manfaat

Penelitian ini akan bermanfaat untuk memberikan wawasan pembaca dari berbagai kalangan mengenai dasar dari Teori Kisi Gauge dan penggunaannya untuk perhitungan tegangan dawai untuk potensial statis dalam SU(3) murni.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan Tugas Akhir ini tersusun dalam lima bab yaitu: Bab 1 terdiri dari: Pendahuluan yang berisi latar belakang masalah, maksud dan tujuan, perumusan masalah

dan manfaat Tugas Akhir. Bab 2: Suplemen Matematika Dasar yang berisi tinjauan mengenai beberapa perangkat matematis yang digunakan seperti Teori Grup dasar dan Integral Lintas. Bab 3: Teori Kisi Gauge yang berisi dasar-dasar dari teori kisi gauge. Bab 4: Potensial Quark Statis dalam Representasi $SU(3)$ yang berisi tentang tinjauan penulis pada suatu pengerjaan dalam Teori Gauge Kisi lebih lanjut. Bab 5: Kesimpulan yang berisi kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan.

BAB II

KROMODINAMIKA KUANTUM

Seperti yang kita tahu, suatu benda tersusun oleh bagian-bagian kecil yang dinamakan sebagai partikel atom. Namun, partikel-partikel tersebut bukanlah bagian yang terkecil. Setelah dilakukan penelitian secara teoretis dan empiris, ditemukan partikel-partikel yang lebih kecil sebagai penyusun atom yaitu partikel Baryon dan Lepton [25]. Partikel Baryon terdiri dari quark-quark dengan enam buah derajat kebebasan berbeda yaitu quark *up*, *charm*, *top*, *down*, *strange* dan *bottom*. Sedangkan Lepton terdiri dari Elektron, Muon, dan Tauon, serta masing-masing neutrino-nya. Keseluruhan partikel tersebut dikelompokkan ke dalam "kebun binatang" partikel elementer. Partikel baryon berinteraksi quark antara partikelnya dan dapat dibahas dalam teori interaksi kuat atau yang lebih dikenal sebagai Kromodinamika kuantum [25].

2.1 Sekilas tentang Teori dalam Kromodinamika Kuantum

Dalam kromodinamika kuantum, beberapa teori yang dibahas diantaranya secara umum yaitu teori tentang teori Kurungan (*Confinement*) dan Kebebasan Asimtotik (*Asymptotic Freedom*)

2.1.1 Teori Kurungan

Teori ini muncul sebagai konsekuensi gaya konstan antara dua muatan warna ketika quark tersebut dipisahkan. Dibutuhkan energi yang bertambah dalam jumlah yang banyak dengan tujuan untuk meningkatkan jarak antara dua buah quark dalam sebuah Hadron. Alhasil energi ini

menghasilkan sebuah pasangan quark-antiquark, merubah hadron awal menjadi sebuah pasangan hadron yang alih-alih menghasilkan muatan warna yang terisolasi. Walaupun secara analitik belum terbukti, kurungan warna telah dibuktikan dengan perhitungan kisi dan beberapa dekade eksperimen [68].

2.1.2 Kebebasan Asimtotik

Kebebasan asimtotik, sebuah penyusutan yang tidak berubah-ubah dalam kekuatan interaksi antara quark dan gluon sebagai skala energi pada interaksi tersebut bertambah (dan skala jarak yang bersangkutan berkurang). Kita lihat dari persamaan ini

$$\alpha(|q^2|) = \alpha(0) \left\{ 1 + \frac{\alpha(0)}{3\pi} \ln(|q^2|/(mc)^2) \right\} \quad (2.1)$$

yang menggambarkan fungsi momentum perpindahan muatan q dalam elektrodinamika kuantum.

Kekuatan kopeling bertambah ketika muatan tersebut saling berdekatan satu sama lain atau dengan $|q^2|$ yang lebih besar, kenyataannya bahwa kita menginterpretasikan secara fisis sebagai konsekuensi dari "polarisasi ruang hampa (*vacuum*)": fungsi ruang hampa tersebut sebagai semacam medium dielektrik, secara terpisah menyaring muatan. Semakin dekat kita mendekat, semakin penyaringan terjadi kurang sempurna, dan semakin besar jarak tersebut semakin efektif muatan tersebut. Tentunya, pers. (2.1) hanya valid terhadap pangkat $\alpha(0)^2$ [16].

Secara eksplisit dapat dilakukan penjumlahan dengan hasil dari deret geometrik

$$\alpha(|q^2|) = \frac{\alpha(0)}{1 - (\alpha(0)/3\pi) \ln(|q^2|/(mc)^2)} \quad (2.2)$$

Dengan jelas, kopeling tersebut "meledak" pada $\ln(|q^2|/(mc)^2) = 3\pi/\alpha(0)$. Bagaimanapun hal ini tidak

bisa diterima secara serius, karena hal ini terjadi pada energi sekitar 10^{280} MeV, yang tidak mudah untuk diakses[16].

Sama halnya yang terjadi pada kasus Kromodinamika Kuantum: "gelembung-gelembung" (*bubbles*) quark-antiquark menimbulkan penyaringan pada warna quark yang mana (mendekati faktor warna) adalah hal yang sama seperti pers. (2.1). Bagaimanapun, terdapat penyimpangan baru dalam kasus Kromodinamika Kuantum yang mana adanya gelembung-gelembung gluon maya. Hal ini menyatakan bahwa kontribusi gluon bekerja pada arah yang lain, yang menghasilkan "anti penyaringan", atau semacam "kamufase". Kita tinjau dengan konstanta kopeling yang berjalan (*running coupling constant*) dalam Kromodinamika kuantum sebagaimana pers. (2.2)

$$\alpha_s(|q^2|) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + (\alpha_s(\mu^2)/12\pi)(11n - 2f) \ln(|q^2|/\mu^2)} \quad (2.3)$$

di mana n adalah bilangan warna (*colors*) yang berjumlah tiga pada model standar, dan f adalah bilangan rasa (*flavors*) yang berjumlah enam. Pada banyak teori dengan $11n - 2f$, anti-penyaringan akan mendominasi, dan konstanta kopeling akan berkurang seiring meningkatnya $|q^2|$ juga, pada jarak pendek gaya "kuat" tersebut menjadi lemah secara relatif. Fenomena ini merupakan dasar dari kebebasan asimtotik yang secara kuantitatif teori tentang Hadron diprediksi [16].

2.2 Aplikasi Kromodinamika Kuantum

Dapat diakui bahwa jumlah hal yang seseorang dapat hitung dalam *QCD* pada masa ini hanyalah sedikit. Di antara aplikasi yang diperoleh adalah penyimpangan pada pengukuran (*Violations of scaling*), dengan koreksi *QCD* untuk menghitung dan mempelajari penghamburan e^+e^- dan e^-p [16]. Hal ini menggunakan teori gangguan yang berdasarkan penyimbangan tersebut dan hanya terbatas

pada jarak pendek. Pada hal yang berbeda, banyak pengerjaan untuk memahami teori kurungan, tetapi berarti memerlukan jarak yang panjang dengan tanpa menggunakan teori gangguan. Salah satu teknik yang menjanjikan ialah "teori gauge kisi" yang merubah ruang waktu kontinu menjadi titik-titik diskrit kisi terbatas dan dengan dilakukan secara numerik [16].

BAB III

TEORI KISI GAUGE

3.1 Integral Lintas

Salah satu konsep utama didalam teori penera kisi (*lattice gauge theory*) adalah integral lintas. Dalam bab ini terdiri dari konsep integral lintas (*path-integral*) bagian dasar yaitu integral lintas dalam mekanika kuantum dan teori medan kuantum yang telah diterjemahkan kedalam waktu Euclidean.

3.1.1 Integral Lintas dalam Mekanika Kuantum

Untuk menjelaskan konsep yang penting ini kita mulai dari kasus mekanika kuantum untuk satu dimensi [39]. Kita mulai dari amplitudo transisi

$$\begin{aligned}\langle x', t' | x, t \rangle &= \langle x' | e^{-iH(t'-t)} | x \rangle \\ &= \langle x' | e^{-iHt'} e^{iHt} | x \rangle\end{aligned}\tag{3.1}$$

Kemudian didefinisikan

$$\begin{aligned}T &= t' - t \\ \Delta t &= t_1 - t\end{aligned}$$

Dengan mengurangkan keduanya, didapatkan

$$t' = T - \Delta t + t_1$$

Dengan memasukkan hubungan kelengkapan untuk keadaan eigen kordinat x

$$\mathbb{I} = \int dx_1 |x_1\rangle \langle x_1|$$

ke dalam elemen matriks, dan dengan menyatakan $T = (t' - t)$ dan $\Delta t = (t_1 - t)$ kita dapatkan amplitudo transisi

$$\langle x', t' | x, t \rangle = \int dx_1 \langle x' | e^{-iH(T-\Delta t)} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-iH(\Delta t)} | x \rangle$$

Kemudian kita bagi waktu T menjadi n bagian, dan dengan memasukkan $(n - 1)$ hubungan kelengkapan keadaan eigen kordinat x

$$\begin{aligned} \langle x', t' | x, t \rangle &= \int dx_1 \cdots \int dx_{n-1} \langle x' | e^{-iH(\Delta t)} | x_{n-1} \rangle \\ &\quad \times \langle x_{n-1} | e^{-iH(\Delta t)} | x_{n-2} \rangle \cdots \langle x_1 | e^{-iH(\Delta t)} | x \rangle \end{aligned}$$

dengan kita asumsikan $x = x_0$ dan $x' = x_n$, maka seluruh elemen matriks dapat dituliskan menjadi dan dengan dihitung dengan transformasi Fourier:

$$\langle x_{k+1} | e^{-iH(\Delta t)} | x_k \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi\Delta t}} \exp(i\Delta t \left(\frac{m}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} \right)^2 - V(x_k) \right))$$

Sehingga untuk seluruh elemen matriks dapat dituliskan

$$\langle x', t' | x, t \rangle = \int \frac{dx_1 \cdots \int dx_{n-1}}{\left(\frac{2\pi i \Delta t}{m} \right)^{\frac{n}{2}}} \exp \left(i \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t \left(\frac{m}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} \right)^2 - V(x_k) \right) \right)$$

Untuk bagian eksponensial dapat diubah menjadi aksi klasik dengan limit n mendekati ∞

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t \left(\frac{m}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} \right)^2 - V(x_k) \right) \\ = \int_0^T dt L(x, \dot{x}) \\ = S(x) \end{aligned}$$

dan untuk bagian selain eksponensial

$$\int \frac{dx_1 \dots \int dx_{n-1}}{\left(\frac{2\pi i \Delta t}{m}\right)^{\frac{n}{2}}} = D_x$$

Sehingga amplitudo transisi pada mekanika kuantum dapat dituliskan dalam bentuk integral lintas (*path integral*) [39]

$$\langle x', t' | x, t \rangle = \int D_x e^{iS} \quad (3.2)$$

bentuk di atas secara lengkap dituliskan pada Lampiran A1.1

3.1.2 Integral Lintas dalam Teori Medan Kuantum

Sekarang kita tinjau dan terjemahkan integral lintas dalam mekanika kuantum pada bahasan sebelumnya ke dalam teori medan [39]. Dengan meninjau $\phi(x^i, t)$ ke dalam bentuk evolusi waktu penggambaran Heisenberg (*Heisenberg picture*) [18]

$$\phi(x^i, t) = e^{iHt} \phi(x^i, t=0) e^{-iHt}$$

Dan juga beberapa aturan dalam terjemahan di antaranya [39]:

$$\begin{aligned} x_i(t) &\longleftrightarrow \phi(x^i, t) \\ i &\longleftrightarrow x^i \\ \prod_{t,i} dx_i(t) &\longleftrightarrow \prod_{t,x^i} d\phi(x^i, t) = D_\phi \\ S = \int dt L &\longleftrightarrow S = \int dt d^3x \mathcal{L} \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan analogi integral lintas mekanika kuantum, nilai ekspektasi vakum yang berisi keseluruhan informasi dalam medan kuantum dituliskan

$$\langle 0 | \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int D_\phi \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) e^{iS}$$

dengan

$$Z = \int D_\phi e^{iS}$$

Untuk selanjutnya, agar menghindari bentuk osilasi pada integrasi [37], maka imajiner dari waktu harus dirubah ke dalam bentuk real (yang selanjutnya dikenal dengan integral lintas Euclidean) dengan rotasi Wick (*Wick's Rotation*) dengan definisi:

$$t = -i\tau$$

dan dengan menyatakan

$$\phi(x_1, t_1) = \phi_1(\tau_1)$$

dan seterusnya, maka dengan cara yang sama untuk integral lintas Euclidean dapat dituliskan [39]:

$$\langle 0 | \phi_1(\tau_1) \phi_2(\tau_2) \dots \phi_n(\tau_n) | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int D_\phi \phi_1(\tau_1) \phi_2(\tau_2) \dots \phi_n(\tau_n) e^{-S_E}$$

dengan S_E merupakan aksi Euclidean.

Dengan rotasi Wick yang telah disebutkan, maka operator medan berubah menjadi

$$\phi(x, \tau) = e^{H\tau} \phi(x, \tau = 0) e^{-H\tau}$$

Kemudian saya ingin meninjau dua buah matriks

$$\langle x', \tau' | \phi_1(t_1) \phi_2(t_2) \dots \phi_l(t_l) | x, \tau \rangle \quad (3.3)$$

dengan $\tau' > \tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_l$ dan

$$\langle x', \tau' | x, \tau \rangle \quad (3.4)$$

Untuk elemen matriks (3.3) dijabarkan

$$\begin{aligned} \langle x', \tau' | \phi_1(t_1) \phi_2(t_2) \dots \phi_l(t_l) | x, \tau \rangle &= \langle x' | e^{-H(\tau' - \tau_1)} \phi_1 \\ &\quad \times e^{-H(\tau_1 - \tau_2)} \phi_2 \\ &\quad \times e^{-H(\tau_2 - \tau_{l-1})} \dots \\ &\quad \times e^{-H(\tau_{l-1} - \tau_l)} \phi_l \\ &\quad \times e^{-H(\tau_l - \tau)} | x \rangle \end{aligned}$$

dengan memasukkan hubungan kelengkapan energi

$$e^{-H\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n\tau} |n\rangle \langle n| \quad (3.5)$$

dan limit τ dan τ' mendekati tak hingga ∞ , sehingga

$$\begin{aligned} \lim_{\tau' \rightarrow \infty, \tau \rightarrow -\infty} \langle x', \tau' | \phi_1(t_1) \phi_2(t_2) \dots \phi_l(t_l) | x, \tau \rangle &= \langle x' | 0 \rangle \langle 0 | \phi_1 \\ &\quad \times e^{-H(\tau_1 - \tau_2)} \phi_2 \\ &\quad \times e^{-H(\tau_2 - \dots)} \\ &\quad \dots e^{-H(\tau_{l-1} - \tau_l)} \\ &\quad \times \phi_l | 0 \rangle \langle 0 | x \rangle \end{aligned}$$

dan dengan cara yang sama untuk matriks kedua

$$\lim_{\tau' \rightarrow \infty, \tau \rightarrow -\infty} \langle x', \tau' | x, \tau \rangle = \langle x' | 0 \rangle \langle 0 | x \rangle$$

maka kedua elemen matriks tersebut dapat disusun sedemikian rupa menjadi bentuk

$$\lim_{\tau' \rightarrow \infty, \tau \rightarrow -\infty} \frac{\langle x', \tau' | \phi_1(\tau_1) \dots \phi_l(\tau_l) | x, \tau \rangle}{\langle x', \tau' | x, \tau \rangle}$$

yang menghasilkan bentuk

$$\begin{aligned} &= \frac{\langle x' | 0 \rangle \langle 0 | \phi_1 \phi_2 \dots \phi_l | 0 \rangle \langle 0 | x \rangle}{\langle x' | 0 \rangle \langle 0 | x \rangle} \\ &= \langle 0 | \phi_1 \phi_2 \dots \phi_l | 0 \rangle \end{aligned}$$

bentuk di atas merupakan nilai ekspektasi vakum yang menyimpan seluruh informasi pada teori medan [39].

Sehingga persamaan di atas dapat diubah menjadi bentuk integral lintas untuk teori medan (Euclidean). Maka untuk matriks pertama(pembilang) menjadi

$$\begin{aligned}\langle x', \tau' | \phi_1(\tau_1) \dots \phi_l(\tau_l) | x, \tau \rangle &= \langle x' | e^{-H(\tau' - \tau_1)} \\ &= \times \phi_1 \dots \phi_l e^{-H(\tau_l - \tau)} | x \rangle \\ ; \quad \tau' &> \tau_1 > \dots > \tau_l > \tau\end{aligned}$$

dan dengan memasukkan hubungan kelengkapan

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_l |x_l\rangle \langle x_l|$$

sehingga

$$\begin{aligned}\langle x', \tau' | \phi_1(\tau_1) \dots \phi_l(\tau_l) | x, \tau \rangle &= \langle x' | e^{-H(\tau' - \tau_1)} \phi(x_1) \\ &\times e^{-H(\tau_1 - \tau_2)} \phi(x_2) \\ &\times \dots \phi(x_l) e^{-H(\tau_l - \tau)} | x \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle x' | e^{-H\Delta\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_m |x_m\rangle \langle x_m| \right) \\
&\quad \times \phi(x_1) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_{m'} |x_{m'}\rangle \langle x_{m'}| \right) \\
&\quad \times e^{-H\Delta\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_n |x_n\rangle \langle x_n| \right) \phi(x_2) \\
&\quad \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_{n'} |x_{n'}\rangle \langle x_{n'}| \right) \dots \\
&\quad \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_p |x_p\rangle \langle x_p| \right) \phi(x_l) \\
&\quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_{p'} |x_{p'}\rangle \langle x_{p'}| \right) e^{-H\Delta\tau} |x\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_m \int_{-\infty}^{\infty} dx_{m'} \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n'} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dx_p \int_{-\infty}^{\infty} dx_{p'} \dots \langle x' | e^{-H\Delta\tau} |x_m\rangle \\
&\quad \times \langle x_m | \phi(x_1) |x_{m'}\rangle \langle x_{m'} | e^{-H\Delta\tau} |x_n\rangle \\
&\quad \times \langle x_n | \phi(x_2) |x_{n'}\rangle \langle x_{n'} | \dots |x_p\rangle \\
&\quad \times \langle x_p | \phi(x_l) |x_{p'}\rangle \langle x_{p'} | e^{-H\Delta\tau} |x\rangle
\end{aligned}$$

Kemudian kita tinjau matriks $\langle x_m | \phi(x_1) |x_{m'}\rangle$, bentuk bagian kanan dapat dituliskan

$$\hat{\phi}(x_1) |x_{m'}\rangle = \phi(x_1) |x_{m'}\rangle \delta(x_1 - x_{m'})$$

maka

$$\begin{aligned}
\langle x_m | \phi(x_1) |x_{m'}\rangle &= \langle x_m | \phi(x_1) |x_{m'}\rangle \delta(x_1 - x_{m'}) \\
&= \phi(x_1) \langle x_m | x_{m'}\rangle \delta(x_1 - x_{m'}) \\
&= \phi(x_1) \delta(x_m - x_{m'}) \delta(x_1 - x_{m'})
\end{aligned}$$

dan seterusnya, maka

$$\begin{aligned}
\langle x', \tau' | \phi_1(\tau_1) \dots \phi_l(\tau_l) | x, \tau \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_m \int_{-\infty}^{\infty} dx_{m'} \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n'} \int_{-\infty}^{\infty} dx_p \int_{-\infty}^{\infty} dx_{p'} \dots \\
&\times \langle x' | e^{-H\Delta\tau} | x_m \rangle \\
&\times \phi(x_1) \delta(x_m - x_{m'}) \delta(x_1 - x_{m'}) \\
&\times \langle x_{m'} | e^{-H\Delta\tau} | x_n \rangle \\
&\times \phi(x_2) \delta(x_n - x_{n'}) \delta(x_2 - x_{n'}) \\
&\times \langle x_{n'} | \dots | x_p \rangle \\
&\times \phi(x_l) \delta(x_p - x_{p'}) \delta(x_l - x_{p'}) \\
&\times \langle x_{p'} | e^{-H\Delta\tau} | x \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_l \dots \\
&\times \langle x' | e^{-H\Delta\tau} | x_1 \rangle \\
&\times \phi(x_1) \langle x_1 | e^{-H\Delta\tau} | x_2 \rangle \\
&\times \phi(x_2) \langle x_2 | \dots | x_l \rangle \\
&\times \phi(x_l) \langle x_l | e^{-H\Delta\tau} | x \rangle
\end{aligned}$$

Kemudian untuk seluruh elemen matriks dapat dituliskan dalam bentuk yang sederhana, dengan $x' \equiv x_0$ dan $x \equiv x_l$ dan ϕ merupakan operator yang komut menjadi bentuk matriks [39]

$$\prod_{j=0}^l \langle x_j | e^{-H\Delta\tau} | x_{j+1} \rangle$$

Dengan prosedur yang sama seperti pada kasus mekanika kuantum (Lampiran A1.1), maka bentuk matriks di atas

dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \langle x_j | e^{-H\Delta\tau} | x_{j+1} \rangle &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\Delta\tau}} \\ &\times \exp\left\{-\Delta\tau \left(\frac{m}{2} \left(\frac{x_j - x_{j+1}}{\Delta\tau} \right)^2 + V(x_{j+1}) \right)\right\} \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \langle x', \tau' | \phi_1(\tau_1) \dots \phi_l(\tau_l) | x, \tau \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_l \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \\ &\phi_1 \phi_2 \dots \phi_l \\ &\times \prod_{j=0}^l \langle x_j | e^{-H\Delta\tau} | x_{j+1} \rangle \\ &= \prod_{i=1}^l \int_{-\infty}^{\infty} dx_i \phi_i \left(\frac{m}{2\pi\Delta\tau} \right)^{l/2} \\ &\times \exp\left\{-\Delta\tau \left(\frac{m}{2} \left(\frac{x_j - x_{j+1}}{\Delta\tau} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + V(x_{j+1}) \right) \right\} \end{aligned}$$

Maka untuk bagian eksponensial

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^l \Delta\tau \left(\frac{m}{2} \left(\frac{x_j - x_{j+1}}{\Delta\tau} \right)^2 + V(x_{j+1}) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right) \\ &\equiv S_E \end{aligned}$$

3.2 Diskritisasi Kisi

Sebelum memulai pembahasan teori penera kisi, kita mulai menterjemahkan alat matematis yang digunakan pada pembahasan integral lintas sebelumnya. Perlu diketahui, kata diskritisasi ini bermakna diskritisasi ruang-waktu yang

berbentuk kisi, sebagai contoh untuk hiperkubik dengan definisi [28]

$$x_\mu = an_\mu \quad (3.6)$$

dengan kuantitas a sebagai jarak kisi.

Kemudian untuk medan skalar ϕ_x didefinisikan dalam kisi [39], dengan turunan parsial menjadi perbedaan terbatas

$$\partial_\mu \phi \longrightarrow \Delta_\mu \phi(x) = \frac{1}{a}(\phi(x + a\mu) - \phi(x)) \quad (3.7)$$

serta integral ruang waktu diubah menjadi penjumlahan

$$\int d^4x \longrightarrow \sum_x a^4 \quad (3.8)$$

Sehingga selanjutnya integral ruang momentum menjadi

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \longrightarrow \frac{1}{a^4 L^3 T} \sum_{l_\mu} \quad (3.9)$$

Selain itu, diskritisasi ruang waktu juga memberikan bentuk *cut-off* pada momentum. Kita tinjau pada medan $\phi(x)$ dalam bentuk transformasi Fourier [39]

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \tilde{\phi}(p) e^{ipx}$$

dengan dibatasi jarak kisi a , maka seperti yang telah kita definsikan $x = na$ maka medan dapat ditulis $\phi(x) \rightarrow \phi(na)$, sehingga medan tersebut dapat dituliskan

$$\phi(na) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \tilde{\phi}_a(p) e^{ipna}$$

dengan p dibatasi dengan batas Zona Brillouin bentuk pertama (untuk kisi) (Lampiran A1.3).

$$-\frac{\pi}{a} < p < \frac{\pi}{a}$$

maka

$$\phi(na) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dp}{2\pi} \tilde{\phi}_a(p) e^{ipna} \quad (3.10)$$

Kemudian $\tilde{\phi}_a(p)$ dapat direpresentasikan dengan deret fourier dari bentuk deret fourier kompleks [4,5] dan koefisiennya

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t}$$

dengan bentuk koefisiennya

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

dengan langkah yang sama maka dari bentuk (3.10) dapat dituliskan dengan $T = 2\pi/a$ dan medan skalar dikalikan dengan a

$$\frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \tilde{\phi}_a(p) e^{ipna} dp = a\phi(na)$$

sehingga dalam bentuk diskrit dapat dituliskan [39]

$$\tilde{\phi}_a(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a\phi(na) e^{-inpa} \quad (3.11)$$

3.3 Medan Skalar Bebas Pada Kisi

Sekarang, kita dapat menuliskan medan skalar bebas dalam bentuk kisi dengan pembahasan sebelumnya tentang diskritisasi kisi [31]. Kita tuliskan persamaan gerak dari aksi:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) (\square + M^2) \phi(x) \quad (3.12)$$

yang mana aksi tersebut berada di dalam ruang minkowski. Karena pada kisi kita menggunakan bentuk waktu imajiner agar memudahkan perhitungan, maka kita tuliskan aksi tersebut dalam ruang Euclidean. Oleh karena itu, kita lakukan beberapa perubahan dengan $x_0 \rightarrow ix_4$ dan $t \rightarrow -it$ maka operator D'alembert [6,14]

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

berubah dalam bentuk Euclidean menjadi:

$$\begin{aligned} \square &= \frac{\partial^2}{\partial(-it)^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \square &= -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \square &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

dengan $g^{(Euclid.)} = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ [14] maka

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \square_E \quad (3.13)$$

sehingga $\square \rightarrow \square_E$

dan juga dilakukan perubahan pada bagian integral

$$\int d^4x = \int \int \int \int dx^1 dx^2 dx^3 dx^0$$

dengan

$$\begin{aligned} dx^0 &= -idx_4 \\ dx^1 &= g_E^{11} dx_1 \\ dx^2 &= g_E^{22} dx_2 \\ dx^3 &= g_E^{33} dx_3 \end{aligned}$$

di mana $g_E^{11} = g_E^{22} = g_E^{33} = g_E^{44} = 1$
Sehingga integral menjadi

$$\begin{aligned} \int d^4x &= \int \int \int \int dx_1 dx_2 dx_3 (-idx_4) \\ &= -i \int d^4x \end{aligned} \tag{3.14}$$

Maka sekarang aksi dapat ditulis dengan

$$S = \frac{i}{2} \int d^4x \phi(x) (-\square_E + M^2) \phi(x)$$

dengan didefinisikan aksi Euclidean sebagai $S_E \rightarrow iS$ maka aksi lengkap Euclidean dapat dituliskan

$$S_E = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) (-\square_E + M^2) \phi(x) \tag{3.15}$$

Kemudian aksi ini dapat dituliskan dalam bentuk kisi dengan

$$\begin{aligned} \square_E \phi(x) &\equiv \partial^2 \phi(na) \\ &= \frac{1}{a^2} \hat{\partial} \phi(na) \end{aligned}$$

dengan

$$\partial^2 \phi(na) = \partial_\mu^f \partial_\mu^b \phi(na)$$

dengan b :backward(belakang), f :forward(depan) dan definisi

$$\frac{d^b y}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

dan

$$\frac{d^f y}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

maka dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^f}{dx} \left(\frac{d^b y}{dx} \right) \\ &= \frac{d^f}{dx} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{d^f y(x)}{dx} - \frac{d^f y(x - \Delta x)}{dx} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} - \frac{y(x) - y(x - \Delta x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) + y(x - \Delta x) - 2y(x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

oleh karena itu bisa diterjemahkan sebagai $\Delta x \rightarrow a$ dan $y(x) \rightarrow \phi(na)$, maka operator d'alembertian dapat dituliskan

$$\square_E \phi(x) \equiv \frac{1}{a^2} (\phi(na + \hat{\mu}a) + \phi(na - \hat{\mu}a) - 2\phi(na))$$

bentuk di atas secara umum dapat dituliskan dengan penjumlahan seluruh arah positif dan arah negatif menjadi

$$\square_E \phi(x) = \frac{1}{a^2} \sum_{\pm\mu} \{\phi(na + \hat{\mu}a) - 2\phi(na)\}$$

maka aksi dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} S_E &= -\frac{1}{2}a^4 \sum_n \phi(na) \left(\frac{1}{a^2} \sum_{\pm\mu} (\phi(na + \hat{\mu}a) - 2\phi(na)) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}a^4 M^2 \sum_n \phi(na) \phi(na) \\ &= -\frac{1}{2}a \sum_n \phi(na) \left(a \sum_{\pm\mu} \phi(na + \hat{\mu}a) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(2 + a^2 M^2) \sum_n a\phi(na) a\phi(na) \end{aligned}$$

dengan kita tuliskan bentuk tak berdimensi $a\phi(na) \rightarrow \hat{\phi}_n$ dan $aM \rightarrow \hat{M}$ maka aksi dapat ditulis sebagai [31]

$$S_E = -\frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \hat{\phi}_n \hat{\phi}_{n+\mu} + \frac{1}{2}(2 + \hat{M}^2) \sum_n \hat{\phi}_n \hat{\phi}_n \quad (3.16)$$

3.4 Fermion pada Kisi

3.4.1 Fermion (Polos) pada Kisi

Pertama kita tinjau persamaan Dirac dalam Ruang Minkowski [31]

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi(x) = 0$$

di mana γ^μ adalah matriks Dirac berdimensi 4x4 (Lampiran A1.4) yang memenuhi hubungan antikomutasi

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

dan ψ adalah medan komponen-4, yang selanjutnya komponen tersebut dilabeli indeks (α, β, etc) dengan $\mu = 0, 1, 2, 3$ dan γ^0 (matriks *time-like*) dan $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ (matriks *space-like*) [31].

Persamaan gerak ψ dan $\bar{\psi} (\equiv \psi^\dagger \gamma^0)$ dituliskan dalam bentuk aksi

$$S_F[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi(x) \quad (3.17)$$

Di dalam teori kuantum, medan ψ dan $\bar{\psi}$ menjadi operator Ψ dan Ψ^\dagger

dan dengan representasi integral lintas untuk fungsi green

$$\langle \Omega | T(\Psi_\alpha(x) \dots \bar{\Psi}_\beta(y) \dots) | \Omega \rangle = \int \frac{D\bar{\psi} D\psi \psi_\alpha(x) \dots \bar{\psi}_\beta(y) \dots e^{iS_F}}{D\bar{\psi} D\psi e^{iS_F}}$$

Representasi fungsi green pada waktu imajiner didapat dengan mengganti

$$iS_F[\psi, \bar{\psi}] \rightarrow -S_F^{(eucl.)}[\psi, \bar{\psi}]$$

dengan x dan y vektor-4 Euclidean.

Kita tuliskan bentuk fungsi Green Euclidean-nya

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T(\Psi_\alpha(x) \dots \bar{\Psi}_\beta(y) \dots) | \Omega \rangle &= \int \frac{D\bar{\psi} D\psi \psi_\alpha(x) \dots \bar{\psi}_\beta(y) \dots [\psi, \bar{\psi}]}{D\bar{\psi} D\psi e^{-S_F^{(eucl.)}[\psi, \bar{\psi}]}} \\ &\times e^{-S_F^{(eucl.)}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Perubahan ini juga merubah set matrik γ menjadi $\gamma_\mu^E (\mu = 1, \dots, 4)$ (Lampiran A1.4) yang memenuhi hubungan anti komutasi

$$\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu}$$

dengan

$$\begin{aligned} \gamma_4^E &= \gamma^0 \\ \gamma_i^E &= -i\gamma^i \end{aligned}$$

Kemudian perubahan dari pembahasan sebelumnya bahwa $x^0 \rightarrow -ix_4$ [31]

$$\begin{aligned}
 \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial(-ix_4)} \\
 \frac{\partial}{-i\partial x_4} &= i \frac{\partial}{\partial x_4} \\
 &= i\partial^4 \\
 &= ig^{44}\partial_4 \\
 &= i\partial_4
 \end{aligned}$$

dengan $g^{44} = 1$ (metric Euclidean).

Maka suku pertama pada aksi tersebut menjadi

$$\begin{aligned}
 i\gamma^\mu \partial_\mu &= i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^1 \partial_1 + i\gamma^2 \partial_2 \\
 &\quad + i\gamma^3 \partial_3 \\
 &= i\gamma^0 \partial_0 - (-i\gamma^1 \partial_1 - i\gamma^2 \partial_2 \\
 &\quad - i\gamma^3 \partial_3) \\
 &= i\gamma_4^E (i\partial_4) - (\gamma_1^E \partial_1 + \gamma_2^E \partial_2 \\
 &\quad + \gamma_3^E \partial_3) \\
 &= -(\gamma_1^E \partial_1 + \gamma_2^E \partial_2 + \gamma_3^E \partial_3 + \gamma_4^E \partial_4) \\
 &= -(\gamma_\mu^E \partial_\mu)
 \end{aligned}$$

Kemudian bentuk integrasi juga berubah

$$\int d^4x = \iiint\int dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

dengan

$$\begin{aligned}
 x^0 &\rightarrow -ix_4 \\
 dx^0 &\rightarrow -idx_4
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 dx^1 &= g^{11}dx_1 \\
 &= dx_1 \\
 dx^2 &= g^{22}dx_2 \\
 &= dx_2 \\
 dx^3 &= g^{33}dx_3 \\
 &= dx_3
 \end{aligned}$$

sehingga bentuk integrasi tersebut menjadi

$$\int d^4x = -id^4x$$

maka bentuk aksinya dari pers. (3.17) menjadi

$$\begin{aligned}
 S_F[\psi, \bar{\psi}] &= -i \int d^4x \bar{\psi}(x)(-\gamma_\mu^E \partial_\mu - M)\psi(x) \\
 &= i \int d^4x \bar{\psi}(x)(\gamma_\mu^E \partial_\mu + M)\psi(x)
 \end{aligned}$$

dan dari definisi $S_F^{(eucl.)} \rightarrow -iS_F$ maka

$$\begin{aligned}
 S_F[\psi, \bar{\psi}] &= -i(i \int d^4x \bar{\psi}(x)(\gamma_\mu^E \partial_\mu + M)\psi(x)) \\
 &= \int d^4x \bar{\psi}(x)(\gamma_\mu^E \partial_\mu + M)\psi(x) \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Kemudian mari kita perkenalkan bentuk diskritisasi ruang waktu kembali dengan meninjau suku-suku di pers. (3.19), medan ψ dan $\bar{\psi}$ berlaku pada kisi $x = na$.

Dari pers. (3.18), bentuk integrasi menjadi

$$D\bar{\psi}D\psi = \prod_{\alpha,n} d\bar{\psi}_\alpha(na) \prod_{\beta,m} d\psi_\beta(ma)$$

Kemudian kita tuliskan variabel kisi tak berdimensi [31]

$$\begin{aligned}
 M &\rightarrow \frac{1}{a}\hat{M} \\
 \psi_\alpha(x) &\rightarrow \frac{1}{a^{3/2}}\hat{\psi}_\alpha(n) \\
 \bar{\psi}_\alpha(x) &\rightarrow \frac{1}{a^{3/2}}\hat{\bar{\psi}}_\alpha(n) \\
 \partial_\mu\psi_\alpha(x) &\rightarrow \frac{1}{a^{3/2}}\hat{\partial}_\mu\hat{\psi}_\alpha(n)
 \end{aligned}$$

di mana $\hat{\partial}_\mu$ merupakan turunan kisi Hermitian

$$\hat{\partial}_\mu\hat{\psi}_\alpha(n) = \frac{1}{2a}[\hat{\psi}_\alpha(n + \hat{\mu}) - \hat{\psi}_\alpha(n - \hat{\mu})]$$

maka

$$\partial_\mu\hat{\psi}_\alpha(n) = \frac{1}{a^{5/2}}\frac{1}{2}[\hat{\psi}_\alpha(n + \hat{\mu}) - \hat{\psi}_\alpha(n - \hat{\mu})]$$

Sehingga bentuk kisi (3.19) menjadi

$$\begin{aligned}
 S_F^{(eucl.)} &= \int d^4x \bar{\psi}_\alpha(x)(\gamma_\mu^E \partial_\mu + M)\psi_\alpha(x) \\
 &= \int d^4x \bar{\psi}_\alpha(x)(\gamma_\mu^E \partial_\mu \psi_\alpha(x) + M\psi_\alpha(x)) \\
 &= a^4 \sum_n \frac{1}{a^{3/2}}\hat{\bar{\psi}}_\alpha(n)(\gamma_\mu^E \frac{1}{a^{5/2}}\frac{1}{2}[\hat{\psi}_\alpha(n + \hat{\mu}) - \hat{\psi}_\alpha(n - \hat{\mu})] \\
 &\quad + \frac{1}{a}\hat{M}\frac{1}{a^{3/2}}\hat{\psi}_\alpha(n)) \\
 &= a^{5/2} \sum_n \hat{\bar{\psi}}_\alpha(n)(\gamma_\mu^E \frac{1}{a^{5/2}}\frac{1}{2}[\hat{\psi}_\alpha(n + \hat{\mu}) - \hat{\psi}_\alpha(n - \hat{\mu})] \\
 &\quad + \frac{1}{a^{5/2}}\hat{M}\hat{\psi}_\alpha(n)) \\
 S_F^{(eucl.)} &= \sum_n \hat{\bar{\psi}}_\alpha(n)(\gamma_\mu^E \frac{1}{2}[\hat{\psi}_\alpha(n + \hat{\mu}) - \hat{\psi}_\alpha(n - \hat{\mu})] \\
 &\quad + \hat{M}\hat{\psi}_\alpha(n))
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.4.2 Masalah Pengganda pada Fermion

Dalam perumusan Fermion pada bentuk kisi, terdapat permasalahan yaitu Masalah pengganda (*doubling problem*) [27,28,34,39]. Masalah ini akan muncul dengan penjabaran berikut. Pertama kita tinjau aksi medan skalar pada pers.(3.16) dengan sedikit perubahan susunan tiap sukunya

$$S_E = \frac{1}{2} \sum_n \hat{\phi}_n (- \sum_{\mu} [\hat{\phi}_{n+\hat{\mu}} - \hat{\phi}_{n-\hat{\mu}} - 2\hat{\phi}_n] + \hat{M}^2 \hat{\phi}_n)$$

dengan

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{n+\hat{\mu}} &= \delta_{n+\hat{\mu},m} \hat{\phi}_m \\ \hat{\phi}_{n-\hat{\mu}} &= \delta_{n-\hat{\mu},m} \hat{\phi}_m \\ \hat{\phi}_n &= \delta_{nm} \hat{\phi}_m \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} S_E &= \frac{1}{2} \sum_n \hat{\phi}_n (- \sum_{\mu} [\delta_{n+\hat{\mu},m} \hat{\phi}_m + \delta_{n-\hat{\mu},m} \hat{\phi}_m - 2\delta_{nm} \hat{\phi}_m] \\ &\quad + \hat{M}^2 \delta_{nm} \hat{\phi}_m) \\ &= \frac{1}{2} \sum_n \hat{\phi}_n (- \sum_{\mu} [\delta_{n+\hat{\mu},m} + \delta_{n-\hat{\mu},m} - 2\delta_{nm} \hat{\phi}_m] + \hat{M}^2 \delta_{nm}) \hat{\phi}_m \end{aligned}$$

dan didefinisikan bagian tengah yang merupakan propagator

$$- \sum_{\mu} [\delta_{n+\hat{\mu},m} + \delta_{n-\hat{\mu},m} - 2\delta_{nm} \hat{\phi}_m] + \hat{M}^2 \delta_{nm} = K_{nm}$$

maka aksi dapat diringkas menjadi

$$S_E = \frac{1}{2} \sum_n \hat{\phi}_n K_{nm} \hat{\phi}_m$$

Kemudian dari bentuk delta Dirac yang berubah menjadi bentuk diskrit menjadi bentuk delta kronecker setelah dibatasi

oleh zona Brillouin (Lampiran A1.5)

$$\delta_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} e^{i\hat{k} \cdot (n-m)} \quad (3.21)$$

sehingga K_{nm} dapat ditulis

$$\begin{aligned} K_{nm} &= \sum_{\mu} [2\delta_{nm} - \delta_{n+\hat{\mu},m} - \delta_{n-\hat{\mu},m}] + \hat{M}^2 \delta_{nm} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} \left(\sum_{\mu} [2e^{i\hat{k} \cdot (n-m)} - e^{i\hat{k} \cdot (n+\hat{\mu}-m)} \right. \\ &\quad \left. - e^{i\hat{k} \cdot (n-\hat{\mu}-m)}] + \hat{M}^2 e^{i\hat{k} \cdot (n-m)} \right) \end{aligned}$$

dengan $\hat{k} \cdot \hat{\mu} = \hat{k}_{\mu}$ maka dapat dituliskan

$$\begin{aligned} K_{nm} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} \left(\sum_{\mu} [2 - e^{i\hat{k}_{\mu}} - e^{-i\hat{k}_{\mu}}] + \hat{M}^2 \right) e^{i\hat{k} \cdot (n-m)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} \left(\sum_{\mu} 2 \left[1 - \frac{(e^{i\hat{k}_{\mu}} - e^{-i\hat{k}_{\mu}})}{2} \right] + \hat{M}^2 \right) e^{i\hat{k} \cdot (n-m)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} \left(\sum_{\mu} 2[1 - \cos \hat{k}_{\mu}] + \hat{M}^2 \right) e^{i\hat{k} \cdot (n-m)} \end{aligned}$$

dengan dilakukan penjabaran didapatkan $1 - \cos \hat{k}_{\mu} = 2 \sin^2 \hat{k}_{\mu}/2$, sehingga

$$K_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} \left(4 \sum_{\mu} \sin^2 \frac{\hat{k}_{\mu}}{2} + \hat{M}^2 \right) e^{i\hat{k} \cdot (n-m)} \quad (3.22)$$

dan bentuk K_{nm} dapat didefinisikan dalam transformasi fourier

$$K_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} \tilde{K}(\hat{k}) e^{i\hat{k} \cdot (n-m)} \quad (3.23)$$

dengan

$$\tilde{K}(\hat{k}) = 4 \sum_{\mu} \sin^2 \frac{\hat{k}_{\mu}}{2} + \hat{M}^2$$

Kemudian kita peroleh invers matriks K_{nm}^{-1} dengan tranformasi balik transformasi fourier [3-5]

$$K_{nm}^{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} (\tilde{K}(\hat{k}))^{-1} e^{i\hat{k} \cdot (n-m)} \quad (3.24)$$

dengan

$$\tilde{K}(\hat{k})^{-1} = \left(4 \sum_{\mu} \sin^2 \frac{\hat{k}_{\mu}}{2} + \hat{M}^2 \right)^{-1}$$

Bentuk invers ini dapat dituliskan sebagai fungsi korelasi urut waktu

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \rangle &= K_{nm}^{-1} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\hat{k} \cdot (n-m)}}{4 \sum_{\mu} \sin^2 \frac{\hat{k}_{\mu}}{2} + \hat{M}^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Kemudian secara eksplisit bentuk fungsi korelasi tersebut dapat didefinisikan dalam bentuk fungsi Green

$$\langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \rangle = G(n, m; \hat{M}) \quad (3.26)$$

Persamaan fungsi korelasi urut waktu tersebut dapat dituliskan menjadi bentuk $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle$. Untuk itu, kita perlu mendefinisikan ulang $\hat{\phi}_n$ dan \hat{M} kembali kedalam bentuk kontinu dengan

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_n &= a\phi(na) \\ \hat{M} &= aM \\ x = na &\rightarrow n = \frac{x}{a} \\ y = ma &\rightarrow m = \frac{y}{a} \end{aligned}$$

dengan limit (kontinu) $a \rightarrow 0$ maka

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \rangle &= \langle a\phi(na)a\phi(ma) \rangle \\ &= a^2 \langle \phi(x)\phi(y) \rangle \end{aligned}$$

Kemudian dengan dilakukan perubahan menjadi

$$\langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \rangle = G\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}; Ma\right)$$

maka

$$\begin{aligned} a^2 \langle \phi(x)\phi(y) \rangle &= G\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}; Ma\right) \\ \langle \phi(x)\phi(y) \rangle &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} G\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}; Ma\right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} \langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \rangle \end{aligned}$$

Bentuk momentum \hat{k}_μ juga dikembalikan menjadi bentuk kontinu

$$\begin{aligned} \hat{k}_\mu &= k_\mu a \\ d\hat{k}_\mu &= dk_\mu a \end{aligned}$$

maka fungsi korelasiurut waktu menjadi

$$\begin{aligned} \langle \phi(x)\phi(y) \rangle &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} a^4 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot (\frac{x}{a} - \frac{y}{a})}}{4 \sum_\mu \sin^2 \frac{k_\mu a}{2} + (Ma)^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} a^4 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{a^2 \left(\frac{4}{a^2} \sum_\mu \sin^2 \frac{k_\mu a}{2} + M^2 \right)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{\left(\frac{4}{a^2} \sum_\mu \sin^2 \frac{k_\mu a}{2} + M^2 \right)} \end{aligned}$$

dan didefinisikan bentuk

$$\frac{2}{a} \sin \frac{k_\mu a}{2} = \tilde{k}_\mu \quad (3.27)$$

sehingga dapat ditulis

$$< \phi(x)\phi(y) > = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{\sum_{\mu} \tilde{k}_{\mu}^2 + M^2}$$

Maka dalam bentuk kontinu fungsi korelasiurut waktu dapat dituliskan dengan $\lim_{a \rightarrow 0} \tilde{k}_{\mu} = k_{\mu}$ menjadi

$$< \phi(x)\phi(y) > = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik \cdot (x-y)}}{k^2 + M^2} \quad (3.28)$$

Kemudian cara yang sama dilakukan untuk aksi Fermion dari pers. (3.20)

$$\begin{aligned} S_F^{(eucl.)} &= \sum_n \bar{\psi}_{\alpha}(n) \left(\frac{1}{2} \gamma_{\mu}^E [\hat{\psi}_{\alpha}(n + \hat{\mu}) - \hat{\psi}_{\alpha}(n - \hat{\mu})] \right. \\ &\quad \left. + \hat{M} \hat{\psi}_{\alpha}(n) \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

aksi di atas dapat diringkas seperti pada pembahasan aksi skalar sebelumnya dengan [4,5] $I_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu}^E \hat{\psi}_{\alpha}(n + \hat{\mu}) &= \gamma_{\mu}^E \delta_{\alpha\beta} \delta_{m,n+\hat{\mu}} \hat{\psi}_{\beta}(m) \\ &= (\gamma_{\mu}^E)_{\alpha\beta} \delta_{m,n+\hat{\mu}} \hat{\psi}_{\beta}(m) \\ \gamma_{\mu}^E \hat{\psi}_{\alpha}(n - \hat{\mu}) &= (\gamma_{\mu}^E)_{\alpha\beta} \delta_{m,n-\hat{\mu}} \hat{\psi}_{\beta}(m) \\ \hat{\psi}_{\alpha}(n) &= \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} \hat{\psi}_{\beta}(m) \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} S_F^{(eucl.)} &= \sum_n \sum_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha}(n) \sum_m \sum_{\beta} \left(\frac{1}{2} (\gamma_{\mu}^E)_{\alpha\beta} [\delta_{m,n+\hat{\mu}} \hat{\psi}_{\beta}(m) \right. \\ &\quad \left. - \delta_{m,n-\hat{\mu}} \hat{\psi}_{\beta}(m)] + \hat{M} \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} \hat{\psi}_{\beta}(m) \right) \\ &= \sum_{n,m,\alpha,\beta} \bar{\psi}_{\alpha}(n) \left(\frac{1}{2} (\gamma_{\mu}^E)_{\alpha\beta} [\delta_{m,n+\hat{\mu}} - \delta_{m,n-\hat{\mu}}] \right. \\ &\quad \left. + \hat{M} \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} \right) \hat{\psi}_{\beta}(m) \end{aligned}$$

Bagian tengah dari aksi tersebut didefinisikan sebagai propagator

$$\frac{1}{2}(\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta}[\delta_{m,n+\hat{\mu}} - \delta_{m,n-\hat{\mu}}] + \hat{M}\delta_{\alpha\beta}\delta_{mn} = K_{\alpha\beta}(n, m)$$

sehingga secara ringkas aksi dapat ditulis sebagai

$$S_F^{(eucl.)} = \sum_{n,m,\alpha,\beta} \bar{\psi}_\alpha(n) K_{\alpha\beta}(n, m) \hat{\psi}_\beta(m)$$

dengan

$$\delta_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4\hat{p}}{(2\pi)^4} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)}$$

Maka propagator dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}(n, m) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4\hat{p}}{(2\pi)^4} \left(\sum_{\mu} \frac{1}{2} (\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta} [e^{i\hat{p} \cdot (n+\mu-m)} - e^{i\hat{p} \cdot (n-\mu-m)}] \right. \\ &\quad \left. + \hat{M}\delta_{\alpha\beta} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)} \right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4\hat{p}}{(2\pi)^4} \left(\sum_{\mu} \frac{1}{2} (\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta} [e^{i\hat{p} \cdot (\hat{\mu})} - e^{i\hat{p} \cdot (-\hat{\mu})}] \right. \\ &\quad \left. + \hat{M}\delta_{\alpha\beta} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)} \right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4\hat{p}}{(2\pi)^4} \left(\sum_{\mu} \frac{1}{2} (\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta} \frac{2i}{2i} [e^{i\hat{p}_\mu} - e^{-i\hat{p}_\mu}] \right. \\ &\quad \left. + \hat{M}\delta_{\alpha\beta} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)} \right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4\hat{p}}{(2\pi)^4} (i \sum_{\mu} (\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta} \sin \hat{p}_\mu + \hat{M}\delta_{\alpha\beta}) e^{i\hat{p} \cdot (n-m)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4\hat{p}}{(2\pi)^4} (i \sum_{\mu} (\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta} \sin \hat{p}_\mu + \hat{M}) \delta_{\alpha\beta} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)} \end{aligned}$$

dengan

$$i \sum_{\mu} (\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta} \sin \hat{p}_\mu + \hat{M} = \tilde{K}(\hat{p}) \quad (3.30)$$

sehingga bentuk propagator $K_{\alpha\beta}(n, m)$ dapat ditulis dalam bentuk transformasi fourier

$$K_{\alpha\beta}(n, m) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \tilde{K}(\hat{p}) \delta_{\alpha\beta} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)} \quad (3.31)$$

Dengan cara sebelumnya, invers matriks dapat ditulis dalam bentuk transformasi balik fourier

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}^{-1}(n, m) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \tilde{K}(\hat{p})^{-1} \delta_{\alpha\beta} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \frac{\delta_{\alpha\beta} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)}}{[i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) \sin \hat{p}_{\mu} + \hat{M}] \\ &\quad \times \frac{-i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) \sin \hat{p}_{\mu} + \hat{M}}{-i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) \sin \hat{p}_{\mu} + \hat{M}}} \end{aligned}$$

untuk bagian penyebut setelah dilakukan penjabaran pada (Lampiran A1.6) didapatkan bentuk [31] ($= \sum_{\mu} \sin^2 \hat{p}_{\mu} + \hat{M}^2$) maka

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}^{-1}(n, m) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \frac{[-i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) \sin \hat{p}_{\mu} + \hat{M}]}{\sum_{\mu} \sin^2 \hat{p}_{\mu} + \hat{M}^2} \\ &\quad \times \delta_{\alpha\beta} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)} \\ &= \langle \hat{\psi}_{\alpha}(n) \bar{\hat{\psi}}_{\beta}(m) \rangle \end{aligned} \quad (3.32)$$

di mana invers sebagai fungsi korelasiurut waktu.

Kemudian definisi serupa seperti pada aksi skalar untuk bentuk korelasi

$$\langle \hat{\psi}_{\alpha}(n) \bar{\hat{\psi}}_{\beta}(m) \rangle = G_{\alpha\beta}(n, m; \hat{M})$$

dengan dikembalikan ke dalam bentuk kontinu

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{\alpha}(n) &= a^{3/2} \psi_{\alpha}(x) \\ \bar{\hat{\psi}}_{\beta}(m) &= a^{3/2} \bar{\psi}_{\beta}(y) \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}_\alpha(n) \bar{\hat{\psi}}_\beta(m) \rangle &= \langle a^{3/2} \psi_\alpha(x) a^{3/2} \bar{\psi}_\beta(y) \rangle \\ &= a^3 \langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \rangle \end{aligned}$$

Kemudian bentuk kontinu tersebut dituliskan ke dalam fungsi Green

$$\langle \hat{\psi}_\alpha(n) \bar{\hat{\psi}}_\beta(m) \rangle = G_{\alpha\beta}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}; Ma\right)$$

dengan limit $a \rightarrow 0$ maka

$$\langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \rangle = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^3} G_{\alpha\beta}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}; Ma\right)$$

dan bentuk momentum dikembalikan juga ke dalam bentuk kontinu $\hat{p}_\mu = p_\mu a$ sehingga bentuk korelasi urut waktu dalam bentuk kontinu dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \rangle &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^3} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{a^4 d^4 p}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \frac{[-i \sum_\mu (\gamma_\mu^E) \sin p_\mu a + Ma]_{\alpha\beta} e^{ip_\mu(x-y)}}{\sum_\mu \sin^2 p_\mu a + (Ma)^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^3} a^4 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times \frac{a[-i \sum_\mu (\gamma_\mu^E) \frac{1}{a} \sin p_\mu a + M]_{\alpha\beta} e^{ip_\mu(x-y)}}{a^2 \left(\sum_\mu \frac{1}{a^2} \sin^2 p_\mu a + (M)^2 \right)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \\ &\quad \frac{[-i \sum_\mu (\gamma_\mu^E) \frac{1}{a} \sin p_\mu a + M]_{\alpha\beta} e^{ip_\mu(x-y)}}{\sum_\mu \frac{1}{a^2} \sin^2 p_\mu a + M^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \\ &\quad \frac{[-i \sum_\mu (\gamma_\mu^E) \frac{1}{a} \sin p_\mu a + M]_{\alpha\beta} e^{ip_\mu(x-y)}}{\sum_\mu \frac{1}{a^2} \sin^2 p_\mu a + M^2} \end{aligned}$$

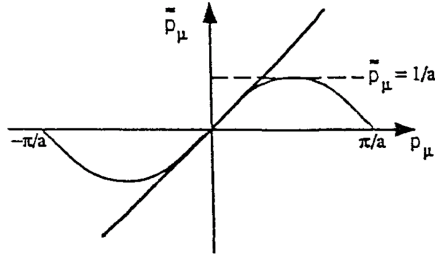
dengan didefinisikan bentuk

$$\frac{1}{a} \sin p_\mu a = \tilde{p}_\mu \quad (3.33)$$

sehingga sekarang fungsi korelasi urut waktu dapat ditulis

$$\begin{aligned} \langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \rangle &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{[-i \sum_\mu (\gamma_\mu^E) \tilde{p}_\mu + M]_{\alpha\beta}}{\sum_\mu \tilde{p}_\mu^2 + M^2} \\ &\quad \times e^{ip \cdot (x-y)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{[-i \sum_\mu (\gamma_\mu^E) \tilde{p}_\mu + M]_{\alpha\beta}}{p^2 + M^2} \\ &\quad \times e^{ip \cdot (x-y)} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Sekarang kita akan masuk kepada permasalahan inti yang akan dibahas pada penulisan ini yaitu tentang masalah pengganda. Masalah pengganda muncul pada pers. (3.27) dan (3.33) di mana pada kasus skalar (3.27) [31]



Gambar 3.1: Plot antara $\sin(p_\mu)a/a$ dengan p_μ dalam Zona Brillouin. Garis lurus menggambarkan bentuk kontinu.[31]

$$\tilde{k}_\mu = \frac{2}{a} \frac{\sin k_\mu a}{2}$$

bentuk sinus di atas hanya bernilai setengah dari kasus Fermion (3.33)

$$\tilde{p}_\mu = \frac{1}{a} \sin p_\mu a$$

hal ini merupakan permasalahan mendasar pada masalah pengganda tersebut yang akan dibahas lebih lanjut pada pembahasan Fermion Wilson. Secara grafik dapat dijelaskan pada (Gambar 3.1) yang menggambarkan terjadinya penyimpangan bagian fermion dengan bentuk kontinu [31].

3.4.3 Fermion Wilson

Untuk mengatasi masalah pengganda tersebut, ditambahkan sebuah suku kinetik boson pada aksi Fermion yang dikenal dengan parameter Wilson [27,34,35]. Dengan adanya tambahan parameter ini, aksi Fermion (yang selanjutnya dinamakan Fermion Wilson) menjadi bentuk

$$\begin{aligned} S_F^{(W)} &= S_F - \frac{r}{2} \sum_n \bar{\psi}_\alpha(n) \hat{\square} \psi_\alpha(n) \\ &= \sum_n \bar{\psi}_\alpha(n) \left(\frac{1}{2} \gamma_\mu^E [\hat{\psi}_\alpha(n + \hat{\mu}) - \hat{\psi}_\alpha(n - \hat{\mu})] \right. \\ &\quad \left. + \hat{M} \hat{\psi}_\alpha(n) - \frac{r}{2} \hat{\square} \hat{\psi}_\alpha(n) \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

dengan

$$\hat{\square} \hat{\psi}_\alpha(n) = \sum_\mu (\hat{\psi}_\alpha(n + \hat{\mu}) + \hat{\psi}_\alpha(n - \hat{\mu}) - 2\hat{\psi}_\alpha(n))$$

dan $a = 1$. Maka secara lengkap aksi Fermion Wilson dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
 S_F^{(W)} &= \sum_n \bar{\psi}_\alpha(n) \left(\frac{1}{2} \gamma_\mu^E [\hat{\psi}_\alpha(n + \hat{\mu}) - \hat{\psi}_\alpha(n - \hat{\mu})] + \hat{M} \hat{\psi}_\alpha(n) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{r}{2} \left(\sum_\mu (\hat{\psi}_\alpha(n + \hat{\mu}) + \hat{\psi}_\alpha(n - \hat{\mu}) - 2\hat{\psi}_\alpha(n)) \right) \right) \\
 &= \sum_n \bar{\psi}_\alpha(n) \left(-\frac{1}{2} \sum_\mu [(r - \gamma_\mu^E) \hat{\psi}_\alpha(n + \hat{\mu}) \right. \\
 &\quad \left. + (r + \gamma_\mu^E) \hat{\psi}_\alpha(n - \hat{\mu})] + (\hat{M} + r) \hat{\psi}_\alpha(n) \right)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya aksi dapat diringkas menjadi

$$\begin{aligned}
 S_F^{(W)} &= \sum_n \bar{\psi}_\alpha(n) \left((\hat{M} + r) \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} - \frac{1}{2} \sum_\mu [(r - \gamma_\mu^E) \delta_{\alpha\beta} \delta_{m,n+\hat{\mu}} \right. \\
 &\quad \left. + (r + \gamma_\mu^E) \delta_{\alpha\beta} \delta_{m,n-\hat{\mu}}] \right) \hat{\psi}_\beta(m)
 \end{aligned}$$

dan didefinisikan suku tengah sebagai propagator

$$\begin{aligned}
 (\hat{M} + r) \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} &- \frac{1}{2} \sum_\mu [(r - \gamma_\mu^E) \delta_{\alpha\beta} \delta_{m,n+\hat{\mu}} \\
 &+ (r + \gamma_\mu^E) \delta_{\alpha\beta} \delta_{m,n-\hat{\mu}}] = K_{\alpha\beta}^{(W)}(n, m)
 \end{aligned}$$

dengan

$$\delta_{mn} = \delta_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)}$$

maka

$$\begin{aligned}
K_{\alpha\beta}(n, m) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} ((\hat{M} + r)\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\mu} [(r - \gamma_{\mu}^E)\delta_{\alpha\beta} e^{i\hat{p}_{\mu}} \\
&\quad + (r + \gamma_{\mu}^E)\delta_{\alpha\beta} e^{-i\hat{p}_{\mu}}]) e^{i\hat{p} \cdot (n-m)} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \{ (\hat{M} + \frac{1}{2} \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E [e^{i\hat{p}_{\mu}} - e^{-i\hat{p}_{\mu}}])_{\alpha\beta} \\
&\quad + r(1 - \frac{1}{2} e^{i\hat{p}_{\mu}} - \frac{1}{2} e^{-i\hat{p}_{\mu}}) \delta_{\alpha\beta} \} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \{ (\hat{M} + \frac{1}{2} \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E \frac{2i}{2i} [e^{i\hat{p}_{\mu}} - e^{-i\hat{p}_{\mu}}])_{\alpha\beta} \\
&\quad + r(1 - \frac{(e^{i\hat{p}_{\mu}} + e^{-i\hat{p}_{\mu}})}{2}) \delta_{\alpha\beta} \} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \{ (\hat{M} + i \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E \sin \hat{p}_{\mu})_{\alpha\beta} \\
&\quad + r(1 - \cos \hat{p}_{\mu}) \delta_{\alpha\beta} \} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \{ (\hat{M} + i \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E \sin \hat{p}_{\mu})_{\alpha\beta} \\
&\quad + 2r \sin^2 \frac{\hat{p}_{\mu}}{2} \delta_{\alpha\beta} \} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \{ i \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E \sin \hat{p}_{\mu} + (\hat{M} + 2r \sin^2 \frac{\hat{p}_{\mu}}{2}) \}_{\alpha\beta} \\
&\quad \times e^{i\hat{p} \cdot (n-m)}
\end{aligned}$$

dengan

$$i \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E \sin \hat{p}_{\mu} + (\hat{M} + 2r \sin^2 \frac{\hat{p}_{\mu}}{2}) = \tilde{K}(\hat{p})^{(W)} \quad (3.36)$$

Oleh karena itu propagator dapat ditulis kembali

$$K_{\alpha\beta}^{(W)}(n, m) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \tilde{K}(\hat{p})^{(W)} \delta_{\alpha\beta} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)}$$

maka dengan cara serupa seperti sebelumnya, didapatkan bentuk invers matriks dengan transformasi balik transformasi Fourier [31]

$$K_{\alpha\beta}^{(W)-1}(n, m) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \tilde{K}(\hat{p})^{(W)-1} \delta_{\alpha\beta} e^{i\hat{p} \cdot (n-m)}$$

dengan

$$\tilde{K}(\hat{p})^{(W)-1} = \left(i \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E \sin \hat{p}_{\mu} + \hat{M}(p) \right)^{-1} \quad (3.37)$$

dan suku $\hat{M} + 2r \sin^2 \hat{p}_{\mu}/2 = \hat{M}(p)$

Untuk menunjukkan bahwa Fermion Wilson dapat menjadi solusi dari masalah pengganda, maka kita dapat tinjau kembali dari bentuk invers propagator Fermion naif pada persamaan [27,35]

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\hat{p})^{-1} &= (-i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) \sin \hat{p}_{\mu} + \hat{M})^{-1} \\ &= \frac{-i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) \sin \hat{p}_{\mu} + \hat{M}}{\sum_{\mu} \sin^2 \hat{p}_{\mu} + \hat{M}^2} \\ &= \frac{-i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) \sin p_{\mu} a + M a}{\sum_{\mu} \sin^2 p_{\mu} a + (M a)^2} \\ &\equiv \frac{\frac{-i}{a} \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) \sin p_{\mu} a + M a}{\sum_{\mu} \frac{1}{a^2} \sin^2 p_{\mu} a + (M a)^2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

di mana untuk melakukan penyederhanaan, maka kita ambil $\hat{M} = 0$ sehingga dapat ditulis

$$\tilde{K}(\hat{p})^{-1} |_{M=0} = \frac{\frac{-i}{a} \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) \sin p_{\mu} a}{\sum_{\mu} \frac{1}{a^2} \sin^2 p_{\mu} a} \quad (3.39)$$

Dari bentuk ini, untuk bentuk kontinu dengan $\lim a \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow 0} \tilde{K}(\hat{p})^{-1} |_{M=0} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\frac{-i}{a} \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) \sin p_{\mu} a}{\sum_{\mu} \frac{1}{a^2} \sin^2 p_{\mu} a} \\
 &= \frac{-i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) p_{\mu}}{\sum_{\mu} p_{\mu}^2} \\
 &= \frac{-i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) p_{\mu}}{p^2} \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

dapat kita lihat pada bentuk kontinu ini terdapat *pole* pada $p = (0, 0, 0, 0)$. Tetapi, kondisi ini berbeda pada bentuk kisi pada pers.(3.34). Pada bentuk ini di dapatkan pole pada semua komponen $p_{\mu} = 0, p_{\mu} = \pi/a$. Pole berlebih yang berjumlah 15 ini memiliki bentuk tak fisis (tidak sesuai bentuk kontinu) [27,35]

$$p = (\pi/a, 0, 0, 0), (0, \pi/a, 0, 0), \dots (\pi/a, \pi/a, \pi/a, \pi/a)$$

ke 15 pole inilah bentuk matematis dari masalah pengganda atau bisa juga disebut sebagai *doubler*.

Sekarang kita tinjau propagator aksi Fermion Wilson pada pers. (3.37) dengan Fermion tak bermassa [27].

$$\begin{aligned}
 \tilde{K}(\hat{p})^{(W)-1} |_{M=0} &= \left(i \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E \sin \hat{p}_{\mu} + 2r \sin^2 \frac{\hat{p}_{\mu}}{2} \right)^{-1} \\
 &= \frac{1}{i \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E \sin \hat{p}_{\mu} + 2r \sin^2 \frac{\hat{p}_{\mu}}{2}} \\
 &\quad \times \frac{-i \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E \sin \hat{p}_{\mu} + 2r \sin^2 \frac{\hat{p}_{\mu}}{2}}{-i \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E \sin \hat{p}_{\mu} + 2r \sin^2 \frac{\hat{p}_{\mu}}{2}} \\
 &= \frac{-i \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E \sin \hat{p}_{\mu} + 2r \sin^2 \frac{\hat{p}_{\mu}}{2}}{\sum_{\mu} \sin^2 \hat{p}_{\mu} + (2r \sin^2 \frac{\hat{p}_{\mu}}{2})^2} \\
 &= \frac{-\frac{i}{a} \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^E \sin p_{\mu} a + \frac{2r}{a} \sin^2 \frac{p_{\mu} a}{2}}{\sum_{\mu} \frac{1}{a^2} \sin^2 p_{\mu} a + (\frac{2r}{a} \sin^2 \frac{p_{\mu} a}{2})^2}
 \end{aligned}$$

maka untuk bentuk kontinu menjadi

$$\lim_{a \rightarrow 0} \tilde{K}(\hat{p})^{(W)-1} |_{M=0} = \frac{-i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) p_{\mu}}{p^2}$$

yang mana pada keadaan ini pole terdapat pada $p = (0, 0, 0, 0)$. Pada keadaan kisi untuk $p_{\mu} = \pm\pi/a$, *doubler* hilang dan dengan penambahan $2/a$ di mana suku ini nanti akan menjadi tambahan massa yang dapat dituliskan

$$m = m + 2rl/a$$

dengan l jumlah pole yang menghilangkan *doubler*/pengganda.

3.5 Medan Gauge Abelian Pada Kisi

Sekarang kita akan membahas kisi untuk medan gauge abelian

3.5.1 Elektrodinamika Kuantum U(1)

Kita mulai dengan aksi invariansi gauge dari elektrodinamika kuantum kontinu. Pertama kita tinjau aksi dari Medan Dirac Bebas [31]

$$S_F^{(0)} = \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - M) \psi(x) \quad (3.41)$$

Aksi ini invarian terhadap transformasi

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow G\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x)G^{-1} \end{aligned}$$

di mana G adalah elemen dari grup Abelian U(1)

$$G = e^{i\Lambda}$$

dengan Λ tidak bergantung x .

$$\begin{aligned}
 S_F^{(0)} &= \int d^4x \bar{\psi}(x) G^{-1} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) G \psi(x) \\
 &= \int d^4x \bar{\psi}(x) e^{-i\Lambda} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) e^{i\Lambda} \psi(x) \\
 &= \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi(x)
 \end{aligned}$$

aksi diatas invarian terhadap transformasi global.

Tetapi untuk transformasi lokal, yaitu $\Lambda = \Lambda(x)$, aksi tersebut tidaklah invarian.

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &\rightarrow G(x)\psi(x) \\
 \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x)G^{-1}(x)
 \end{aligned}$$

Transformasi ini dilakukan pada aksi diatas

$$\begin{aligned}
 S_F^{(0)} &= \int d^4x \bar{\psi}(x) G^{-1}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) G(x) \psi(x) \\
 &= \int d^4x \bar{\psi}(x) e^{-i\Lambda(x)} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) e^{i\Lambda(x)} \psi(x) \\
 &= \int d^4x \bar{\psi}(x) e^{-i\Lambda(x)} (i\gamma^\mu \partial_\mu e^{i\Lambda(x)} \psi(x) - M e^{i\Lambda(x)} \psi(x)) \\
 &= \int d^4x \bar{\psi}(x) e^{-i\Lambda(x)} (i\gamma^\mu ((\partial_\mu e^{i\Lambda(x)}) \psi(x) \\
 &\quad + e^{i\Lambda(x)} \partial_\mu \psi(x)) - M e^{i\Lambda(x)} \psi(x)) \\
 &= \int d^4x \bar{\psi}(x) e^{-i\Lambda(x)} \{ i\gamma^\mu (i(\partial_\mu \Lambda(x)) e^{i\Lambda(x)} \psi(x) + e^{i\Lambda(x)} \partial_\mu \psi(x)) \\
 &\quad - M e^{i\Lambda(x)} \psi(x) \} \\
 &= \int d^4x \bar{\psi}(x) e^{-i\Lambda(x)} e^{i\Lambda(x)} \{ i\gamma^\mu (i(\partial_\mu \Lambda(x)) \psi(x) + \partial_\mu \psi(x)) \\
 &\quad - M \psi(x) \} \\
 &= \int d^4x \bar{\psi}(x) \{ i\gamma^\mu (i(\partial_\mu \Lambda(x)) \psi(x) + \partial_\mu \psi(x)) - M \psi(x) \}
 \end{aligned}$$

maka muncullah suku tambahan yang mengganggu kesimetrian pada persamaan tersebut.

Invariansi dapat dipertahankan melalui pergantian suku turunan ∂_μ dengan kovarian derivatif D_μ dengan

$$\begin{aligned}\partial_\mu &\rightarrow D_\mu \\ D_\mu &= \partial_\mu + ieA_\mu\end{aligned}\tag{3.42}$$

sehingga aksi dapat ditulis

$$S_F = \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - M)\psi(x)$$

dengan A_μ bertransformasi

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x)$$

Maka dengan transformasi lokal pada aksi fermion tersebut, aksi bertansformasi sebagaimana

$$\begin{aligned}S_F &= \int d^4x \bar{\psi}(x)G^{-1}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - M)G(x)\psi(x) \\ &= \int d^4x \bar{\psi}(x)e^{-i\Lambda(x)}(i\gamma^\mu D_\mu - M)e^{i\Lambda(x)}\psi(x) \\ &= \int d^4x \bar{\psi}(x)e^{-i\Lambda(x)}(i\gamma^\mu D_\mu e^{i\Lambda(x)}\psi(x) - Me^{i\Lambda(x)}\psi(x)) \\ &= \int d^4x \bar{\psi}(x)e^{-i\Lambda(x)}(i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)e^{i\Lambda(x)}\psi(x) \\ &\quad - Me^{i\Lambda(x)}\psi(x)) \\ &= \int d^4x \bar{\psi}(x)e^{-i\Lambda(x)}(i\gamma^\mu((\partial_\mu(e^{i\Lambda(x)}\psi(x)) \\ &\quad + ieA_\mu(e^{i\Lambda(x)}\psi(x))) - Me^{i\Lambda(x)}\psi(x))\end{aligned}$$

dan dengan mensubstitusi bentuk D_μ dari pers. (3.42) maka

$$\begin{aligned}
S_F &= \int d^4x \bar{\psi}(x) e^{-i\Lambda(x)} (i\gamma^\mu ((\partial_\mu e^{i\Lambda(x)})\psi(x) + e^{i\Lambda(x)}\partial_\mu\psi(x)) \\
&\quad + ie(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x))(e^{i\Lambda(x)}\psi(x)) - Me^{i\Lambda(x)}\psi(x)) \\
&= \int d^4x \bar{\psi}(x) e^{-i\Lambda(x)} (i\gamma^\mu (i(\partial_\mu\Lambda(x))e^{i\Lambda(x)}\psi(x) \\
&\quad + e^{i\Lambda(x)}\partial_\mu\psi(x)) + ieA_\mu(e^{i\Lambda(x)}\psi(x)) \\
&\quad - i\partial_\mu\Lambda(x)e^{i\Lambda(x)}\psi(x)) - Me^{i\Lambda(x)}\psi(x)) \\
&= \int d^4x \bar{\psi}(x) e^{-i\Lambda(x)} (i\gamma^\mu ((\partial_\mu(e^{i\Lambda(x)}\psi(x)) \\
&\quad + ieA_\mu(e^{i\Lambda(x)}\psi(x))) - Me^{i\Lambda(x)}\psi(x)) \\
&= \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - M)\psi(x) \\
&= \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu D_\mu - M)\psi(x)
\end{aligned}$$

sehingga sekarang aksi fermion tersebut invarian terhadap transformasi lokal.

Namun, aksi tersebut belum memungkinkan propagasi bagi medan gauge A_μ karena belum mengandung suku kinetik bagi medan bersangkutan. Suku kinetik tersebut diberikan oleh [31]

$$S_G = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.43)$$

di mana $F^{\mu\nu}, F_{\mu\nu}$ merupakan tensor tegangan medan dengan

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\
F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu
\end{aligned}$$

Oleh karena itu dapat dituliskan aksi lengkap yang menggambarkan dinamika $\psi, \bar{\psi}$, dan A_μ sebagai aksi bagi Elektrodinamika Kuantum [31]

$$S_{QED} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu D_\mu - M)\psi(x)$$

Langkah selanjutnya adalah membuat aksi S_{QED} menjadi aksi Euclidean dengan

$$S_{QED}^{(eucl.)} = S_G^{(eucl.)} + S_F^{(eucl.)}$$

dengan perubahan yang telah dituliskan pada pembahasan sebelumnya

$$\begin{aligned} x^0 &\rightarrow -ix_4 \\ A^0 &\rightarrow +iA_4 \end{aligned}$$

dan diaplikasikan pada $\partial_0 \rightarrow +i\partial_4$ pada pembahasan sebelumnya maka

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ &= \partial^0 A'^0 + \partial^1 A'^1 + \partial^2 A'^2 + \partial^3 A'^3 - (\partial'^0 A^0 + \partial'^1 A^1 \\ &\quad + \partial'^2 A^2 + \partial'^3 A^3) \\ &= -i\partial_4(iA'_4) + g^{11}\partial_1 A'_1 + g^{22}\partial_2 A'_2 + g^{33}\partial_3 A'_3 \\ &\quad - (-i\partial'_4 A_4 + g^{11}\partial'_1 A_1 \\ &\quad + g^{22}\partial'_2 A_2 + g^{33}\partial'_3 A_3) \\ &= \partial_4 A'_4 + \partial_1 A'_1 + \partial_2 A'_2 + \partial_3 A'_3 - (\partial'_4 A_4 + \partial'_1 A_1 + \partial'_2 A_2 \\ &\quad + \partial'_3 A_3) \\ &= \partial_\mu A'_\nu - \partial'_\nu A_\mu \\ &= F_{\mu\nu}^E \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama untuk bentuk kovarian maka

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^E$$

Kemudian untuk suku integrasinya dengan cara yang telah dibahas pada pembahasan sebelumnya

$$\int d^4x \rightarrow -i \int d^4x$$

maka bentuk aksi gauge menjadi

$$S_G = \frac{i}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^E F_{\mu\nu}^E$$

sehingga

$$S_G^{(eucl.)} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^E F_{\mu\nu}^E$$

Maka dengan mensubstitusi persamaan - persamaan di atas akan didapatkan persamaan [31]

$$S_{QED}^{(eucl.)} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^E F_{\mu\nu}^E + \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu^E D_\mu - M)\psi(x)$$

3.5.2 Formulasi Kisi Elektrodinamika Kuantum

Untuk hal ini, kita gunakan aksi yang kemungkinannya dekat pada formulasi kontinu. Oleh karena itu kita dapat bekerja dengan Fermion Wilson yang telah dituliskan. Dengan menulis medan Dirac tanpa topi ($\hat{\cdot}$). Untuk penyederhanaan, aksi Fermion Wilson dituliskan [31]

$$\begin{aligned} S_F^{(W)} = & (\hat{M} + r) \sum_n \bar{\psi}(n)\psi(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu) \\ & \times \psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)\psi(n)] \end{aligned}$$

Aksi di atas invarian terhadap transformasi Global

$$\begin{aligned} \psi(n) & \rightarrow G\psi(n) \\ \bar{\psi}(n) & \rightarrow \bar{\psi}(n)G^{-1} \end{aligned}$$

dengan G tidak bergantung pada n dan μ .

Tetapi yang kita inginkan adalah aksi invarian terhadap transformasi lokal yaitu G bergantung pada kedudukan kisi (n), $G = G(n)$. Karena $G(n)$ tidak bekerja pada indeks Dirac, maka cukup kita tinjau suku bilinear $\bar{\psi}(n)\psi(n + \mu)$. Untuk memudahkan kita dalam meninjau suku bilinear ini, maka kita dapat tuliskan

$$\begin{aligned} n & \rightarrow x \\ n + \mu & \rightarrow x + \mu = y \end{aligned}$$

sehingga

$$\bar{\psi}(n)\psi(n+\mu) \rightarrow \bar{\psi}(x)\psi(y)$$

Suku $\bar{\psi}(x)\psi(y)$ bertransformasi menurut

$$\bar{\psi}(x)\psi(y) \rightarrow \bar{\psi}(x)G^{-1}(x)G(y)\psi(y)$$

Agar suku ini invarian terhadap transformasi lokal, maka harus dimasukkan suatu faktor yang bergantung pada potensial gauge yang mengkompensasi variasi gauge di atas. Faktor tersebut diberikan dalam bentuk

$$U(x, y) = e^{ie \int_x^y dz_\mu A_\mu(z)} \quad (3.44)$$

Terhadap transformasi A_μ

$$A_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda$$

$U(x, y)$ bertransformasi sebagai berikut

$$\begin{aligned} U(x, y) &\rightarrow G(x)U(x, y)G^{-1}(y) \\ U(x, y) &= e^{i\Lambda(x)} \exp\{ie \int_x^y dz_\mu A_\mu(z)\} e^{-i\Lambda(y)} \\ &= e^{i\Lambda(x)} \exp\{ie \int_x^y dz_\mu (A_\mu(z) + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda)\} e^{-i\Lambda(y)} \\ &= e^{i\Lambda(x)} \exp\{ie \int_x^y dz_\mu (A_\mu(z) + i \int_x^y dz_\mu \partial_\mu \Lambda)\} e^{-i\Lambda(y)} \end{aligned}$$

dengan

$$\partial_\mu = g_{\mu\nu} \partial^\nu \equiv \partial^\nu$$

maka

$$\begin{aligned} U(x, y) &= e^{i\Lambda(x)} \exp\{ie \int_x^y dz_\mu (A_\mu(z) + i \int_x^y dz_\mu \partial^\mu \Lambda)\} e^{-i\Lambda(y)} \\ &= e^{i\Lambda(x)} \exp\{ie \int_x^y dz_\mu (A_\mu(z))\} \exp\{i\Lambda(z) \Big|_x^y\} e^{-i\Lambda(y)} \\ &= \exp\{ie \int_x^y dz_\mu (A_\mu(z))\} \\ &= U(x, y) \end{aligned}$$

yang mana menunjukkan bahwa faktor U ini invarian terhadap transformasi lokal. Dari fakta tersebut, kita dapat simpulkan bahwa bentuk bilinear pada medan Fermion menjadi invarian dengan masukan dari faktor U di atas. Kita dapat tunjukkan secara sederhana

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x)U(x,y)\psi(y) &\rightarrow \bar{\psi}(x)G^{-1}(x)G(x)U(x,y)G^{-1}(y)G(y)\psi(y) \\ &\rightarrow \bar{\psi}(x)U(x,y)\psi(y)\end{aligned}$$

Sekarang kita misalkan $y = x + \epsilon$, dengan ϵ elemen kecil ($\epsilon \ll 1$). Maka kita tuliskan suku bilinear tersebut

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x)\psi(x+\epsilon) &\rightarrow \bar{\psi}(x)U(x, x+\epsilon)\psi(x+\epsilon) \\ \bar{\psi}(x+\epsilon)\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x+\epsilon)U^\dagger(x, x+\epsilon)\psi(x)\end{aligned}$$

Kita tinjau bagaian integrasi pada eksponensial

$$\begin{aligned}ie \int_x^y dz_\mu A_\mu(z) &= ie z_\mu A_\mu(z) \Big|_x^y \\ &= ie(y_\mu A_\mu(y) - x_\mu A_\mu(x)) \\ &= ie((x_\mu + \epsilon_\mu)A_\mu(x + \epsilon) - x_\mu A_\mu(x)) \\ &= ie\epsilon_\mu A_\mu \\ &= ie\epsilon.A(x)\end{aligned}$$

maka dapat kita tuliskan

$$U(x, x + \epsilon) = e^{ie\epsilon.A(x)}$$

Selanjutnya perumusan di atas diterapkan pada aksi kisi Fermion Wilson sehingga setelah dilakukan substitusi menjadi

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)\psi(n + \hat{\mu}) &\rightarrow \bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)U_{n, n+\hat{\mu}}\psi(n + \hat{\mu}) \\ \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)\psi(n) &\rightarrow \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)U_{n+\hat{\mu}, n}\psi(n + \hat{\mu})\end{aligned}$$

dengan

$$U_{n+\hat{\mu}, n} = U_{n, n+\hat{\mu}}^\dagger$$

Ruas kanan tersebut invarian terhadap Transformasi Lokal

$$\begin{aligned}
\psi(n) &\rightarrow G(n)\psi(n) \\
\bar{\psi}(n) &\rightarrow \bar{\psi}(n)G^{-1}(n) \\
U_{n,n+\hat{\mu}} &\rightarrow G(n)U_{n,n+\hat{\mu}}G^{-1}(n+\hat{\mu}) \\
U_{n+\hat{\mu},n} &\rightarrow G(n+\hat{\mu})U_{n+\hat{\mu},n}G^{-1}(n)
\end{aligned}$$

bentuk di atas disubstitusi pada aksi kisi invarian Fermion Wilson

$$\begin{aligned}
S_F^{(W)} &= (\hat{M} + r) \sum_n \bar{\psi}(n)\psi(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu) \\
&\quad \times U_{n,n+\hat{\mu}}\psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)U_{n,n+\hat{\mu}}^\dagger\psi(n)]
\end{aligned}$$

dengan kita ambil ansatz

$$U_{n,n+\hat{\mu}} \equiv U_\mu(n) = e^{ieaA_\mu(n)}$$

Sejalan dengan kasus kontinu, dinamika Potensial Gauge diperoleh melalui substitusi suku Tensor tegangan diskrit ke dalam aksi. Oleh karena itu, didefinisikan [27,31,35]

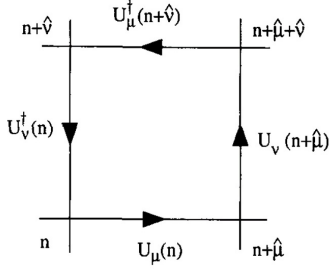
$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu}(n) &= U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(n) \\
&= \exp\{iea[A_\mu(n) + A_\nu(n + \hat{\mu}) - A_\mu(n + \hat{\nu}) - A_\nu(n)]\} \\
&= \exp\{iea[(A_\nu(n + \hat{\mu}) - A_\nu(n)) - (A_\mu(n + \hat{\nu}) - A_\mu(n))]\}
\end{aligned}$$

bentuk ini disebut sebagai satu plakat (Gambar 3.2). Kemudian dengan tensor tegangan versi diskrit diberikan oleh

$$F_{\mu\nu}(n) = \frac{1}{a} \{[A_\nu(n + \hat{\mu}) - A_\nu(n)] - [A_\mu(n + \hat{\nu}) - A_\mu(n)]\}$$

dengan mengalikan kisi a pada bagian eksponensial dari plakat tersebut maka plakat dapat dituliskan dalam bentuk

$$U_{\mu\nu}(n) = e^{iea^2 F_{\mu\nu}(n)}$$



Gambar 3.2: Plakat pada bidang $\mu\nu$. [31]

Dari definisi plakat ini, dengan spasi kisi kecil ($a \ll$)

$$\begin{aligned}
 U_{\mu\nu}(n) &= e^{iea^2 F_{\mu\nu}(n)} \\
 &\approx 1 + iea^2 F_{\mu\nu}(n) - \frac{e^2 a^4 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{2!}
 \end{aligned}$$

maka dapat dibentuk suatu rumusan

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2e^2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} [1 - \frac{1}{2}(U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^{\dagger}(n))] &= \frac{1}{2e^2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} [1 - \frac{1}{2} \\
 &\quad - \frac{i}{2} ea^2 F_{\mu\nu}(n) \\
 &\quad - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} ea^2 F_{\mu\nu}(n) \\
 &\quad + \frac{1}{4} e^2 a^4 F_{\mu\nu}(n) F_{\mu\nu}(n) \\
 &\quad + \frac{1}{4} e^2 a^4 F_{\mu\nu}(n) F_{\mu\nu}(n)] \\
 &\approx \frac{1}{4} \sum_{n, \mu < \nu} a^4 F_{\mu\nu}(n) F_{\mu\nu}(n) \\
 &\approx S_G
 \end{aligned}$$

yang merupakan pendekatan aksi medan gauge dalam bentuk

kisi. Oleh karena itu aksi kisi untuk potensial gauge sebagai

$$S_G(n) = \frac{1}{2e^2} \sum_P [1 - \frac{1}{2}(U_P + U_P^\dagger)]$$

dengan $U_P = U_{\mu\nu}(n)$, P sebagai indeks Plakat. Bentuk ini merupakan perkalian variabel link yang dibatasi oleh plakat dengan arah berlawanan jarum jam dan sumasi dilakukan terhadap semua plakat.

Dengan demikian aksi lengkap untuk aksi Elektrodinamika pada kisi dapat ditulis oleh

$$\begin{aligned} S_{QED}[U, \psi, \bar{\psi}] &= \frac{1}{2e^2} \sum_P [1 - \frac{1}{2}(U_P + U_P^\dagger) + (\hat{M} + r)] \\ &\times \sum_n \bar{\psi}(n) \psi(n) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n, \mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu) U_{n, n+\hat{\mu}} \psi(n + \hat{\mu}) \\ &+ \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu) U_{n, n+\hat{\mu}}^\dagger \psi(n)] \quad (3.45) \end{aligned}$$

3.6 Medan Gauge Non Abelian Pada Kisi

Pada perumusan sebelumnya dapat diperluas ke dalam kasus grup uniter non-abelian. Medan Dirac tunggal diganti sebagai ψ^a dengan $a = 1, \dots, N$. Maka aksi Fermion untuk medan non-abelian dapat dituliskan [31]

$$\begin{aligned} S_F &= (\hat{M} + r) \sum_n \sum_{a=1}^N \bar{\psi}^a(n) \psi^a(n) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n, \mu} \sum_{a=1}^N [\bar{\psi}^a(n)(r - \gamma_\mu) \psi^a(n + \hat{\mu}) \\ &+ \bar{\psi}^a(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu) \psi^a(n)] \end{aligned}$$

aksi ini invarian terhadap transformasi global.

Selanjutnya diperkenalkan vektor kolom dan vektor baris N-komponen untuk memperingkas

$$\tilde{\psi} = \begin{bmatrix} \psi \\ \vdots \\ \psi^N \end{bmatrix}, \tilde{\bar{\psi}} = [\bar{\psi}^1, \dots, \bar{\psi}^N]$$

yang bertransformasi sebagaimana

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x) &\rightarrow \tilde{G}\tilde{\psi}(x) \\ \tilde{\bar{\psi}}(x) &\rightarrow \tilde{\bar{\psi}}(x)\tilde{G}^{-1} \end{aligned}$$

di mana \tilde{G} adalah elemen grup $SU(N)$.

Generalisasi aksi Wilson abelian menjadi non-abelian dilakukan dengan mengganti medan Dirac ψ dan $\bar{\psi}$ dengan vektor komponen-N di atas, dan variabel linknya sebagai elemen grup $SU(N)$ (representasi fundamental). Variabel link tersebut ditulis dalam bentuk ansatz

$$\tilde{U}_\mu(n) = e^{i\tilde{\phi}(n)}$$

di mana $\tilde{\phi}(n) = g_0 a \tilde{A}_\mu(n)$, yang merupakan matriks Hermitian milik aljabar Lie grup $SU(N)$.

Maka versi lengkap aksi untuk medan gauge abelian dapat dituliskan dengan

$$\begin{aligned} S_F^{(W)} &= (\hat{M} + r) \sum_n \tilde{\bar{\psi}}(n) \tilde{\psi}(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\tilde{\bar{\psi}}(n)(r - \gamma_\mu) \tilde{U}_\mu(n) \\ &\quad \times \tilde{\psi}(n + \hat{\mu}) + \tilde{\bar{\psi}}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu) \tilde{U}_\mu^\dagger(n) \tilde{\psi}(n)] \end{aligned}$$

Sehingga aksi tersebut invarian terhadap transformasi lokal (karena variabel link tersebut).

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(n) &\rightarrow \tilde{G}(n) \tilde{\psi}(n) \\ \tilde{\bar{\psi}}(n) &\rightarrow \tilde{\bar{\psi}}(n) \tilde{G}^{-1}(n) \\ \tilde{U}_\mu(n) &\rightarrow \tilde{G}(n) \tilde{U}_\mu(n) \tilde{G}^{-1}(n + \hat{\mu}) \\ \tilde{U}_\mu^\dagger(n) &\rightarrow \tilde{G}(n + \hat{\mu}) \tilde{U}_\mu(n)^\dagger \tilde{G}^{-1}(n) \end{aligned}$$

dengan $\tilde{G}(n)$ adalah elemen grup $SU(N)$ dalam representasi fundamental.

$$\tilde{G}(n) = e^{i\tilde{\Lambda}(n)}$$

di mana $\tilde{\Lambda}(n)$ adalah matriks Hermitian milik aljabar lie grup $SU(N)$.

Selanjutnya untuk membangun aksi bagi medan gauge didefinisikan plakat seperti pada medan abelian

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{\mu\nu}(n) &= \tilde{U}_\mu(n)\tilde{U}_\nu(n+\hat{\mu})\tilde{U}_\mu^\dagger(n+\hat{\nu})\tilde{U}_\nu^\dagger(n) \\ &= e^{i\tilde{\phi}_\mu(n)}e^{i\tilde{\phi}_\nu(n+\hat{\mu})}e^{-i\tilde{\phi}_\mu(n+\hat{\nu})}e^{-i\tilde{\phi}_\nu(n)}\end{aligned}$$

Dengan menggunakan Formula Baker-Campbell-Housdorff [3-5]

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \quad (3.46)$$

dari persamaan plakat di atas, dapat diringkas agar mempermudah proses penjabaran

$$\begin{aligned}i\tilde{\phi}_\mu(n) &= A \\ i\tilde{\phi}_\nu(n+\hat{\mu}) &= B \\ -i\tilde{\phi}_\mu(n+\hat{\nu}) &= C \\ -i\tilde{\phi}_\nu(n) &= D\end{aligned}$$

maka bentuk Formula Baker-Campbell-Housdorff pada pers. (3.46) dengan empat variabel menjadi

$$\begin{aligned}e^A e^B e^C e^D &= e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+C+D+\frac{1}{2}[C,D]+\frac{1}{2}[B,C]} \\ &\quad \times e^{\frac{1}{2}[A,D]+\frac{1}{2}[A,C]+\frac{1}{2}[B,D]}\end{aligned} \quad (3.47)$$

dan dengan ekspansi deret Taylor

$$\tilde{\phi}_\mu(n+\hat{\nu}) \approx \tilde{\phi}_\mu(n) + a\partial_\nu\tilde{\phi}_\mu(n) + \dots$$

sehingga dengan penjabaran yang dilakukan pada Lampiran A1.7 dapat dituliskan variabel plakat menjadi

$$\tilde{U}_{\mu\nu}(n) = \exp\{ig_0a^2(\partial_\mu\tilde{A}_\nu - \partial_\nu\tilde{A}_\mu + ig_0[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu])\}$$

Selanjutnya didefinisikan bentuk tensor tegangan dengan

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{a}(\partial_\mu\tilde{A}_\nu - \partial_\nu\tilde{A}_\mu + ig_0[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu])$$

maka plakat dituliskan

$$\tilde{U}_{\mu\nu}(n) = e^{ig_0a^2\tilde{F}_{\mu\nu}}$$

Dengan dituliskan dalam bentuk kontinu, maka didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{\mu\nu} &= \lim_{a \rightarrow 0} \tilde{F}_{\mu\nu} \\ &= \partial_\mu\tilde{A}_\nu - \partial_\nu\tilde{A}_\mu + ig_0[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu]\end{aligned}\quad (3.48)$$

3.6.1 Formulasi Kisi Kromodinamika Kuantum SU(3)

Dari bentuk $\tilde{F}_{\mu\nu}$ pada pers.(3.48), yang mana adalah elemen dari aljabar Lie, maka untuk bentuk SU(3) dapat diekspansi dalam bentuk [31]

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(n) = \sum_{B=1}^8 F_{\mu\nu}^B(n) \frac{\lambda^B}{2}$$

dan bentuk

$$\tilde{A}_{\mu\nu}(n) = \sum_{B=1}^8 A_{\mu\nu}^B(n) \frac{\lambda^B}{2}$$

serta hubungan komutasi

$$[\lambda^A, \lambda^B] = 2i \sum_{C=1}^8 f_{ABC} \lambda^C$$

maka tensor $F_{\mu\nu}^B$ menjadi

$$F_{\mu\nu}^B = \partial_\mu A_\nu^B - \partial_\nu A_\mu^B - g_0 f_{BCD} A_\mu^C A_\nu^D$$

Sebagaimana dijelaskan pada kasus non-Abelian kontinu, yang mana suku invarian diperoleh melalui *trace*, maka aksi gauge tersebut diberikan oleh bentuk [31]

$$S_G = c \text{Tr} \sum_{n, \mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{2} (\tilde{U}_{\mu\nu}(n) + \tilde{U}_{\mu\nu}^\dagger(n)) \right] \quad (3.49)$$

dengan c adalah tetapan yang ditentukan kemudian. Dengan bentuk U yang telah didefinisikan, maka

$$\begin{aligned} S_G &= c \text{Tr} \sum_{n, \mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{2} (e^{ig_0 a^2 \tilde{F}_{\mu\nu}} + e^{-ig_0 a^2 \tilde{F}_{\mu\nu}}) \right] \\ &= c \text{Tr} \sum_{n, \mu < \nu} [1 - \cos(g_0 a^2 \tilde{F}_{\mu\nu})] \\ &= c \text{Tr} \sum_{n, \mu < \nu} \left[2 \sin^2 \left(\frac{g_0 a^2 \tilde{F}_{\mu\nu}}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

dan dilakukan ekspansi pada $\sin^2 x$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - \dots$$

dengan $a \ll$, maka

$$\begin{aligned} S_G &= c \text{Tr} \sum_{n, \mu < \nu} \left[2 \left(\frac{g_0 a^2 \tilde{F}_{\mu\nu}}{2} \right)^2 \right] \\ &= c \text{Tr} \sum_{n, \mu < \nu} \left[2 \left(\frac{g_0^2 a^4 \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}}{4} \right) \right] \\ &= c g_0^2 \text{Tr} \sum_{n, \mu < \nu} \left[\left(\frac{a^4 \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

sehingga dapat ditulis di dalam limit kontinu

$$S_G \rightarrow c g_0^2 S_G^{(cont.)}$$

dengan aksi gauge kontinu

$$\begin{aligned} S_G^{(cont.)} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \sum_n a^4 \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \int d^4 x \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

dan kita tentukan $c = 1/g_0^2$.

Kemudian dengan relasi sebelumnya dituliskan

$$\begin{aligned} S_G^{(cont.)} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \int d^4 x \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \int d^4 x F_{\mu\nu}^B \frac{\lambda^B}{2} F_{\mu\nu}^B \frac{\lambda^B}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4} \int d^4 x F_{\mu\nu}^B F_{\mu\nu}^B \text{Tr}(\lambda^B 2 \lambda^B) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4} \int d^4 x F_{\mu\nu}^B F_{\mu\nu}^B 2 \delta_{BB} \\ &= \frac{1}{4} \int d^4 x F_{\mu\nu}^B F_{\mu\nu}^B \end{aligned}$$

Kemudian dengan prosedur yang sama, aksi kisi bagi medan gauge untuk semua $N > 1$ diberikan oleh

$$S_G^{(SU(N))} = c \text{Tr} \sum_P \left[1 - \frac{1}{2} (\tilde{U}_P + \tilde{U}_P^\dagger(n)) \right]$$

dengan $\text{Tr}(1) = N$

$$\begin{aligned} &= c \sum_P \left[N - \frac{\text{Tr}}{2} (\tilde{U}_P + \tilde{U}_P^\dagger(n)) \right] \\ &= cN \sum_P \left[1 - \frac{\text{Tr}}{2N} (\tilde{U}_P + \tilde{U}_P^\dagger(n)) \right] \end{aligned}$$

dan bisa didefinisikan

$$\beta = cN = \frac{N}{g_0^2}$$

maka

$$S_G^{(SU(N))} = \beta \sum_P [1 - \frac{\text{Tr}}{2N} (\tilde{U}_P + \tilde{U}_P^\dagger(n))]$$

Karena Kromodinamika kuantum merupakan SU(3), maka aksi lengkap kromodinamika kuantum dapat ditulis [31]

$$S_{QCD} = S_G[U] + S_F^{(W)}[U, \psi, \bar{\psi}] \quad (3.50)$$

dengan

$$S_G[U] = \frac{3}{g_0^2} \sum_P [1 - \frac{\text{Tr}}{6} (\tilde{U}_P + \tilde{U}_P^\dagger(n))]$$

dan

$$\begin{aligned} S_F^{(W)} &= (\hat{M} + r) \sum_n \tilde{\psi}(n) \tilde{\psi}(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\tilde{\psi}(n)(r - \gamma_\mu) \\ &\quad \times \tilde{U}_\mu(n) \tilde{\psi}(n + \hat{\mu}) \\ &\quad + \tilde{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu) \tilde{U}_\mu^\dagger(n) \tilde{\psi}(n)] \end{aligned} \quad (3.51)$$

BAB IV

POTENSIAL QUARK STATIS DALAM REPRESENTASI SU(3)

Pada pembahasan sebelumnya, telah dibahas dasar dari teori kisi gauge secara umum. Pada bab ini, diuraikan mengenai potensial antara dua buah statis quark dengan representasi fundamental dan yang lebih tinggi

4.1 Putaran Wilson

Putaran Wilson (*Wilson Loop*) memiliki definisi yaitu *trace* pada operator transpor atau yang biasa disebut *link*, pada lintasan tertutup (plakat)

4.1.1 Putaran Wilson

Bentuk putaran wilson diberikan oleh [29,31]

$$W = \text{Tr} U_P \quad (4.1)$$

dengan U merupakan *link* dalam representasi SU(3) dan *link* ini invarian terhadap transformasi lokal [31].

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(n) &\rightarrow G^{-1}(n + \hat{\mu}) U_{\mu\nu} G(n + \hat{\nu}) \\ U_{\mu\nu}(n) &\rightarrow e^{-i\Lambda(n+\hat{\mu})} U_{\mu\nu} e^{i\Lambda(n+\hat{\nu})} \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \text{Tr}(G^{-1}(n + \hat{\mu}) U_{\mu\nu} G(n + \hat{\nu})) &= \text{Tr} U_{\mu\nu} \\ &= \text{Tr} U_P \end{aligned}$$

Secara umum, putaran wilson tersebut dapat dituliskan sebagai [29]

$$W_C[U] = \prod_{l \in C} \text{Tr} U_l \quad (4.2)$$

Kemudian, selain didapatkan dari *Trace* dari *link* ($\text{Tr} U$), bentuk putaran Wilson W juga didapatkan dengan nilai ekspektasi (*expectation value*) U yang dituliskan [35]

$$\begin{aligned} W &= \langle U \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \int DA_\mu \text{tr} U e^{-S} \end{aligned} \quad (4.3)$$

dengan A_μ : medan gauge, U : *link*, S : aksi.

Sebelum kita membangun sebuah aksi kisi yang akan dituliskan pada sub-bab 4.3.1, kita ubah bentuk integrasi ke dalam bentuk integral lintas. Oleh karena itu, dapat kita ganti [36]

$$DA_\mu = \prod_{x, \mu} dU_\mu(x)$$

dengan

$$\begin{aligned} dU_\mu(x) &= \prod_{a=1,2,3} J(A^2) dA_\mu^a(x) \\ , J(A^2) &= \frac{1 - \cos A^2/4}{A^2/4} \end{aligned} \quad (4.4)$$

perhitungan nilai ekspektasi di atas selanjutnya dapat digunakan dengan metode Monte-Carlo.

4.1.2 Representasi Fundamental, 6 dan 8

Bentuk Putaran Wilson yang telah dibahas di atas merupakan Putaran Wilson dalam representasi fundamental, yang memiliki 8 generator sebagai Matriks Gell-Mann pada pers. (2.5) [25,26].

Untuk mempelajari bentuk representasi fundamental dan representasi yang lebih tinggi, kita mulai dengan membahas grup SU(2) terlebih dahulu. Kita mulai meninjau dua elektron yang memiliki dua buah spin pada sebuah orbital ($S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{2}$), sebagai contoh dua elektron pada kasus atom Helium. Pada teori kuantum dijelaskan bahwa total spin adalah bernilai nol atau satu, dengan

$$\underbrace{\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right|}_{S=0(\text{singlet})} \leq S \leq \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{S=1(\text{triplet})} \quad S = S_1 + S_2$$

Dua spin ini membentuk representasi 2 (fundamental) yang mana berinteraksi dengan perkalian *direct product* dan menghasilkan

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$$

di mana 3 adalah keadaan triplet untuk $S = 1$, dengan bilangan kuantum azimut $m = -1, 0, 1$ yang mendefinisikan keadaan tersebut. Sedangkan 1 adalah keadaan singlet untuk $S = 0$. Sehingga dengan perkalian *direct product* ini kita mempunyai empat derajat kebebasan. $S = 1$ ini merupakan salah satu dari representasi yang lebih tinggi, yang dimiliki oleh grup SU(2) ini. Jika kita memiliki tiga objek dengan putaran satu setengah di suatu keadaan, kita dapat membuat objek lain dengan derajat kebebasan yang lebih besar, dan dalam representasi yang lebih tinggi. Inilah makna dari

representasi yang lebih tinggi yang akan dibahas pada subbab selanjutnya. Ketika objek memiliki tiga buah derajat kebebasan, matriks 3×3 yang menggambarkan transformasi tersebut. Untuk $SU(2)$, matriks ini dikenal sebagai J. Matriks Fundamental dari grup $SU(2)$ adalah matriks Pauli yang berjumlah tiga buah matrik 2×2 , dengan [7-12]

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \hat{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bentuk $S = 1$ ditransformasikan menjadi matriks 3×3 karena bentuk ini memiliki tiga derajat kebebasan. Jumlah matriks ini tetap berjumlah tiga yang senilai dengan matriks Pauli di atas.

Sekarang kita dapat aplikasikan pengertian dari representasi fundamental dan representasi yang lebih tinggi dari grup $SU(2)$ ini ke dalam grup $SU(3)$ yang mana kita memiliki tiga quark, tiga warna dan tiga derajat kebebasan. Quark bekerja pada representasi Fundamental $SU(3)$. Transformasi quark terjadi dalam ruang internal quark dengan matriks $SU(3)$. Ini berarti, ketika quark tersebut ingin berganti warna maka diperlukan matrik 3×3 . Oleh karena itu, kita dapat meninjau sebuah objek dengan derajat kebebasan (warna/*color*) yang lebih tinggi dengan menggunakan konsep teori grup seperti yang telah dijelaskan untuk $SU(2)$.

Kita gunakan q sebagai ganti representasi 2 sebagai multiplikasi teori grup:

$$q \otimes \bar{q} \rightarrow g \oplus 1 \quad (4.5)$$

dengan q :quark, \bar{q} :anti-quark dan g :gluon. Atau dituliskan dalam multiplikasi $SU(3)$ dengan

$$3 \otimes \bar{3} \rightarrow 8 \oplus 1 \quad (4.6)$$

Representasi 8 dari SU (3) pada bagian kanan menggambarkan transformasi dari gluon seperti $S = 1$ (triplet) dalam grup SU(2). Representasi ini memiliki delapan dimensi yang berarti memiliki delapan derajat kebebasan dan gluon (ini) memiliki delapan warna. Matriks yang mentransformasi warna gluon ini berbentuk matriks 8×8 . Matriks fundamental SU(3) dibangun oleh delapan generator Gell Mann pers.(2.5). Kita dapat membangun objek lain dengan derajat kebebasan warna yang berbeda seperti [53,54]

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3} \quad (4.7)$$

dari sini representasi 6 terbentuk.

Kemudian untuk representasi 10:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

Representasi ini didapatkan dari multiplikasi tiga quark. Pada hasil multiplikasi tersebut, hanya gluon (8) yang merupakan objek fisis sedangkan yang lain adalah objek matematis. Dari berbagai multiplikasi ini, lebih lanjut kita dapat menentukan representasi yang lebih tinggi dengan jumlah quark dan antiquark yang berbeda. Oleh karena itu, dari beberapa representasi lebih tinggi yang didapatkan, kita dapat memproyeksikan hal ini untuk menentukan Putaran Wilson representasi yang lebih tinggi ke dalam bentuk Putaran Wilson representasi fundamental, dengan dituliskan dari bentuk pers.(4.1) [53-55]

$$W_3 = \text{Tr}U$$

Sekarang kita tinjau Putaran Wilson untuk representasi 8 -dapat disebut sebagai representasi adjoint-. Dari penjabaran di atas pada pers.(4.4) kita dapatkan bentuk representasi 8 [53-55]:

$$\begin{aligned} 8 &= 3 \otimes \bar{3} - 1 \\ \text{Tr}(8) &= \text{Tr}[3 \otimes \bar{3} - 1] \\ \text{Tr}(W_8) &= \text{Tr}U(\text{Tr}U^*) - 1 \end{aligned}$$

Dan dengan cara yang sama untuk representasi 6

$$\text{Tr}(W_6) = (\text{Tr}U)^2 - \text{Tr}(U^*) \quad (4.8)$$

4.2 Potensial pada Teori Gauge Kisi

Potensial antara dua partikel quark dan anti quark didapatkan dari teori kurungan quark grup warna SU(3). Potensial ini merupakan gabungan energi medan gauge dengan sumber quark dan antiquark statis. Potensial ini didefinisikan dengan hubungan [29-36]

$$V(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log < W(C) > \quad (4.9)$$

dari bentuk

$$W = (C) = W(R, T) \simeq \exp[-V(R)T]$$

dengan ukuran putaran Wilson $R \times T$ dan R: jarak pemisahan quark, T: waktu propagasi.

Potensial di atas merupakan potensial dalam representasi fundamental [53,54].

4.3 Metode Monte-Carlo

Untuk menghitung nilai ekspektasi untuk mendapatkan W pada pers.(4.3) tidaklah mudah, karena terdapat integrasi tak-berhingga, sehingga diperlukan adanya metode numerik untuk melakukan perhitungan. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah metode Monte-Carlo [25,26].

Prinsip integrasi Monte-Carlo relatif sedikit sederhana. Setiap integral dapat dihitung sebagai nilai rata-rata dari integran terukur pada titik-titik acak dalam domain integrasi. Sebagai contoh pada integral satu dimensi [25,26].

$$\int_0^a dx x = \frac{1}{2}a^2 \quad (4.10)$$

Kemudian kita definisikan y_i sebagai bilangan acak antara nol dan satu. Maka kita dapatkan rata-rata,[25,26]

$$\frac{a}{N} \sum_{i=1}^N x_i, x_i = ay_i$$

dan bentuk ini mendekati hasil integral pers.(4.10) untuk N besar

$$\begin{aligned} \frac{a}{N} \sum_{i=1}^N x_i &= a^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \\ &= a^2 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama untuk integral pada nilai ekspektasi pada pers(4.3) dapat dihitung dengan nilai A_μ, U , dll yang acak dan rata-ratanya [25,26]. Untuk bentuk lengkapnya, akan dituliskan pada Lampiran A1.8.

4.4 Perhitungan

4.4.1 Kisi Anisotropik

Perhitungan dilakukan dengan simulasi pada aksi *tadpole-improved* pada kisi anisotropik [57]

$$S = \beta \left\{ \frac{5}{3} \frac{\Omega_{sp}}{\varepsilon u_s^4} + \frac{4}{3} \frac{\varepsilon \Omega_{tp}}{u_s^2 u_t^2} - \frac{1}{12} \frac{\Omega_{sr}}{\varepsilon u_s^6} - \frac{1}{12} \frac{\varepsilon \Omega_{str}}{u_s^2 u_t^2} \right\} \quad (4.11)$$

di mana $\beta = 6/g^2$, g : *QCD Coupling*, ε : *aspect ratio* ($\varepsilon = a_s/a_t$, a_s : *spatial link*, a_t : *temporal link*), Ω_{sp} : penjumlahan pada plakat spasial, Ω_{tp} : penjumlahan pada plakat temporal, Ω_{sp} : penjumlahan pada 2x1 plakat segi-empat spasial, Ω_{str} : penjumlahan pada plakat segi-empat temporal pendek (1 temporal link dan 2 spatial link secara berurutan). *Link* spasial rata-rata, u_s memiliki rumusan

$$u_s = \left\langle \frac{1}{3} \text{ReTr} P_{ss'} \right\rangle^{\frac{1}{4}}$$

di mana $P_{ss'}$: plakat spasial. Kemudian secara umum *link* temporal(waktu) rata-rata u_t memiliki rumusan

$$u_t = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} \langle \text{ReTr} P_{st} \rangle}}{u_s}$$

di mana P_{st} : plakat spasial-temporal, jika link temporal jauh lebih kecil dari link spasial $a_t \ll a_s$, link temporal rata-rata dapat ditentukan sebagai $u_t = 1$. Pengukuran dilakukan pada kisi anisotropik $8^3 \times 24$ pada $\beta = 6$ dengan $\varepsilon = 3$ [57].

4.4.2 Pelumasan

Pelumasan pada *link-link* spasial dilakukan untuk memperkecil kontaminasi keadaan-keadaan tereksitasi dalam

fungsi korelasi. Pada prosedur pelumasan setiap *link* diganti dengan *link* itu sendiri ditambah jumlah dari empat spasial terdekat dikalikan dengan faktor smearing λ yang dilakukan pengembalian ke bentuk SU(3) dengan $P_{su(3)}$

$$U_j(x) = P_{su(3)}\{U_j(x) + \lambda \sum_{\pm k \neq j} U_k(x) U_j(x + \hat{k}) U_k^\dagger(x + \hat{j})\} \quad (4.12)$$

dengan λ adalah faktor pelumasan dan P menunjukan pengembalian bentuk ke SU(3) [61].

4.4.3 Kode Pencocokan/*Fitting* untuk Mendapatkan Tegangan Dawai sebagai Parameter Potensial

Dua kode pencocokan digunakan untuk menghitung potensial-potensial dan tegangan-tegangan dawai. Untuk kode pertama berupa pencocokan dengan putaran Wilson pada tiap R yang tetap dalam bentuk eksponensial

$$W \simeq e^{-V(R)T}$$

bentuk W didapatkan dari pengukuran menggunakan simulasi pada pers. (4.3) dan ditemukan potensial quark statis $V(R)$ pada tiap jarak kisi R dengan

$$V(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log < W(R, T) > \quad (4.13)$$

Potensial yang didapatkan dari pencocokan bentuk pertama kemudian digunakan untuk mencocokkan potensial dari bentuk linear [27-36,38,41]:

$$V(R) \simeq -A/R + KR + C \quad (4.14)$$

dengan R: jarak kisi yang besar, A: bentuk koefisien Coulomb, K: tegangan dawai dan C: bilangan Casimir.

Penjabaran lebih lanjut tentang potensial ini terdapat pada Lampiran A1.9.

4.5 Algoritma untuk Simulasi

Dengan meninjau analisis pada pembahasan sebelumnya, kita dapat membangun beberapa algoritma untuk menjalankan simulasi.

4.5.1 Aksi Kisi *Tadpole Improved*

Untuk membangun program simulasi perhitungan pada aksi *tadpole-improved*, pertama kita lakukan dengan mencari *link* spasial dan temporal rata-rata.

```
\Algoritma Aksi Kisi Tadpole-Improved}\\
{aksi di dapatkan dengan memasukan setiap variabel
ke dalam persamaan}
```

*Deklarasi:

```
P_{ss'}, P_{st}, dan u_{s}, \beta, \varepsilon,
\Omega_{sp}, \Omega_{tp}, \Omega_{str}
```

*Deskripsi:

```
-Input variabel plakat spasial P_{ss'} ke dalam
persamaan u_{s}
-Input variabel plakat spasial temporal P_{st} dan
u_{s} ke dalam persamaan u_{t}
-Input keseluruhan variabel ke dalam persamaan
untuk aksi tadpole improved
```

4.5.2 Pelumasan

Untuk pelumasan, dapat dibangun algoritma

```
\Algoritma Pelumasan\
{Pelumasan dengan mengganti setiap \textit{link} dengan
\textit{link} itu sendiri dan ditambah empat spasial
terdekat yang dikalikan dengan faktor pelumasan kemudian dikemba
```

*Deklarasi:

$P_{\{SU(3)\}}, U_{\{k\}}(x), U_{\{j\}}(x), \lambda$

*Deskripsi:

- Input setiap link U terdekat, kalikan dengan faktor pelumasan
- Tambahkan dengan link U pertama
- Lakukan pengembalian ke bentuk $SU(3)$ dengan operator P
- Selesai

4.5.3 Potensial Quark Statis

Kita dapat membangun algoritma untuk potensial quark statis yang didapatkan dari bentuk eksponensial sebagai hubungan antara putaran Wilson dengan potensial.

\Algoritma Potensial Quark Statis\
 {Potensial quark statis didapatkan dengan hubungan
 putaran Wilson dan potensial}

*Deklarasi:

Kisi $8^3 \times 24$: $N_x=N_y=N_z=8$; $N_t=24$, $R=(2,2,2)$,

*Deskripsi:

- Input aksi tadpole-improved kedalam formula putaran Wilson, lakukan perhitungan dengan metode Monte-Carlo
- Ubah putaran Wilson ke dalam bentuk logaritma
- Input W kedalam persamaan potensial quark statis
- Setelah didapatkan nilai V , input R dan V tersebut ke dalam persamaan potensial untuk V dalam bentuk persamaan linear untuk V
- Didapatkan nilai A , K dan C
- Selesai

Tabel 4.1: Parameter Potensial dalam Fungsi Representasi

Repr.	K	K/K_f	A/A_f	C/C_f
3	.3480(6)	-	-	-
6	.7688(9)	2.209(5)	2.65(2)	2.5
8	.710(1)	2.040(5)	2.32(1)	2.25

4.6 Hasil dan Pembahasan

Pencocokan dilakukan dengan beberapa perhitungan dan pengukuran menggunakan simulasi kedalam kisi anisotropik seperti yang telah disebutkan sehingga dihasilkan parameter potensial tiap representasi pada tabel 1 dengan K sebagai tegangan dawai, indeks f menunjukan bentuk fundamental, A bentuk coulombik, dan C sebagai bilangan Casimir [38,41]. Dari tabel tersebut terlihat bahwa kita bisa mendapatkan potensial quark statis dalam model teori kurungan untuk representasi yang lebih tinggi melalui pencocokan(*fitting*) pada potensial berbentuk linear. Tegangan dawai yang dihasilkan untuk representasi 6 dan 8 memiliki nilai dua kali lipat lebih dari tegangan dawai fundamental. Perbedaan parameter antar representasi terjadi karena pengaruh *strength* antar quark yang berbeda pada tiap representasi tersebut.

Hasil diatas didapatkan dengan mengacu hasil dari komputasi pada [53]. Contoh kode program [63] yang dapat digunakan terdapat pada Lampiran B.

BAB V KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Dari pengerjaan yang telah dilakukan, telah ditunjukkan parameter-parameter potensial berdasarkan representasi yang berbeda-beda di antaranya representasi fundamental(3), 6 dan 8. Parameter ini menunjukkan bahwa parameter tegangan dawai ada dan nilainya berbeda-beda tiap representasi seperti ditunjukkan pada tabel dengan

1. Tegangan dawai representasi fundamental sama dengan 0.3480 dan *error* 6,
2. Tegangan dawai representasi 6 sama dengan 0.7688 dan *error* 9,
3. Tegangan dawai representasi 8 sama dengan 0.710 dan *error* 1,

Oleh karna itu, dengan cara seperti ini dapat ditunjukkan potensial dan parameternya untuk representasi yang lebih tinggi.

5.2 Saran

Penulis memberi saran untuk penulisan selanjutnya adalah dengan melakukan simulasi pada perhitungan serta melakukan perhitungan dalam representasi yang lebih tinggi (10, 15a, 15s, dst.).

DAFTAR PUSTAKA

- [1] H.F. Jones, *Groups, Representations, and Physics 2nd Edition*. IOP Publishing, UK, 1998.
- [2] A. Zee, *Group Theory in a Nutshell for Physicists*. Princeton University Press, USA, 2016.
- [3] K.F. Riley, M.P. Hobson, dan S.J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering Third Edition*. Cambridge University Press, UK, 2006.
- [4] M.L. Boas, *Mathematical Methods in The Physical Sciences*. John Wiley and Sons, Inc., USA, 2006.
- [5] G.B. Arfken, H.J. Weber, dan F.E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists A Comprehensive Guide Seventh Edition*. Elsevier Inc., USA, 2013.
- [6] A. Purwanto, *Teori Relativitas Khusus*. ITS Press, Surabaya, 2011.
- [7] A. Purwanto, *Fisika Kuantum*. Gava Media, Yogyakarta, 2005.
- [8] S. Gaisiorowicz, *Quantum Physics*. John Wiley and Sons, Inc., USA, 2003.
- [9] D. McMahon, *Quantum Mechanics Demystified*. McGraw Hill, USA, 2006.
- [10] D.J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice-Hall, New Jersey, 1995.

- [11] R.P. Feynman dan A.R.Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Dover Publications, New York, 1965.
- [12] W. Greiner, *Quantum Mechanics An Introduction*. Springer, Germany, 2001.
- [13] W. Greiner, *Quantum Mechanics Symmetries*. Springer, New York, 1994.
- [14] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations*. Springer, Germany, 2000.
- [15] B.R. Martin dan G. Shaw, *Particle Physics Second Edition*. John Wiley and Sons, England, 1997.
- [16] D.J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley and Sons, Canada, 1987.
- [17] R.D. Klauber, *Student Friendly Quantum Field Theory*. Sandtrove Press, Iowa, 2013.
- [18] H.Kleinert, *Particles and Quantum Field Theory*. World Scientific, Singapore, 2016.
- [19] F. Mandl dan G. Shaw, *Quantum Field Theory 2nd Edition*. John Wiley and Sons,Inc., UK, 2010.
- [20] D. McMahon, *Quantum Field Theory Demystified*. McGraw Hill, USA, 2008.
- [21] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell 2nd Edition*. Princeton University Press, New Jersey, 2010.
- [22] W. Greiner dan B. Muller, *Quantum Mechanics Symmetries*. Springer, New York, 1994.
- [23] D. Tong, *Quantum Field Theory Lecture*. Cambridge, UK, 2006.

- [24] A. Das, *Field Theory A Path Integral Approach*. World Scientific, Singapore, 2006.
- [25] W. Greiner dan A. Schafer, *Quantum Chromodynamics*. Springer, New York, 1994.
- [26] W. Greiner, S. Schramm dan E. Stein, *Quantum Chromodynamics Third Edition*. Springer, New York, 1994.
- [27] C. Gatttringer dan C.B. Lang, *Quantum Chromodynamics on the Lattice An Introductory Presentation*. Springer, New York, 2010.
- [28] M. Chaichian dan N.F. Nelipa, *Introduction to Gauge Field Theories*. Springer, Tokyo, 1984.
- [29] M. Guidry, *Gauge Field Theories An Introduction with Applications*. Wiley, Germany, 2004.
- [30] K. Huang, *Quarks, Leptons and Gauge Fields Second Edition*. World Scientific, Singapore, 1992.
- [31] H.J. Rothe, *Lattice Gauge Theories An Introduction*. World Scientific, Singapore, 2005.
- [32] C. Rebbi, *Lattice Gauge Theories and Monte Carlo Simulations*. World Scientific, Singapore, 1983.
- [33] F. Knechtli, M. Gunther, M. Peardon, *Lattice Quantum Chromodynamics Practical Essentials*. Springer Nature, Netherlands, 2017.
- [34] T. DeGrand dan C. DeTar, *Lattice Methods for Quantum Chromodynamics*. World Scientific, Singapore, 2006.
- [35] A. Maas. *Lattice quantum field theory. Lecture in SS 2017 at the KFU Graz*.

- [36] R. Gupta, arXiv:hep-lat/9807028v1.
- [37] G.P. Lepage, arXiv:hep-lat/0506036v1.
- [38] S. Deldar, arXiv:hep-lat/9809137v3.
- [39] G.Munster, M. Walzl, arXiv:hep-lat/0012005v1.
- [40] G.P. Lepage, arXiv:hep-lat/050603v1.
- [41] S. Deldar, arXiv:hep-lat/9911008v3.
- [42] M. Faber, J. Greensite, dan S. Olejnik, Phys. Rev. D57 (1998) 2603-2609.
- [43] C. Bernard, Phys. Lett. 108B (1982) 431.
- [44] J. Ambjorn, P. Olesen, dan C. Peterson, Nucl. Phys. B240 (1984) 189.
- [45] C. Michael, Nucl. Phys. B259 (1985) 58.
- [46] G. Poulis dan H. Trotter, Phys. Lett. B400 (1997) 358.
- [47] S. Ohta, M. Fukugita, dan A. Ukawa, Phys. Lett. B173 (1986) 15.
- [48] M.E. Faber dan H. Markum, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 4 (1998) 204
- [49] M. Muller, W. Beirl, M. Faber, dan H. Markum, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 26 (1992) 423.
- [50] N.A. Campbell, I.H. Jorjysz, dan C. Michael, Phys. Lett. 167B (1986) 91.
- [51] C. Michael, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 16 (1992) 417.
- [52] C. Michael, hep-lat/9809211.

- [53] S. Deldar, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 73 (1999) 587.
- [54] S. Deldar, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 83-84 (2000) 440.
- [55] G.S. Bali, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 83-84 (2000) 422.
- [56] G.S. Bali, hep-ph/0001312.
- [57] C. Morningstar, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 53 (1997) 914.
- [58] M. Alford, W. Dimm, G.P. Lepage, G. Hockney, dan P.B. Mackenzie, Phys. Lett. B361 (1995) 87.
- [59] G.S. Bali dan K. Schilling, Phys. Rev. D46 (1992) 2636.
- [60] G.P. Lepage dan P.B. Mackenzie, Phys. Rev. D48 (1993) 2250.
- [61] M. Albanese *et al.*, Phys. Lett. B192 (1987) 163.
- [62] R. Sommer, Nucl. Phys. B411 (1994) 839.
- [63] <http://physics.indiana.edu/~sg/milc.html>.
- [64] P.W. Stephenson, Nucl. Phys. B550 (1999) 427.
- [65] O. Philipsen dan H. Wittig, Phys. Lett. B451 (1999) 146.
- [66] A.Purwanto, Perumusan Superkonduktivitas Berdasarkan Teori Gauge Kisi. Thesis Fisika ITB, Bandung, 1993.
- [67] E. Latifah, Formulasi Integral Lintas Feynman bagi Efek Casimir. Tesis Fisika ITS, Surabaya, 2004.
- [68] K. Wilson, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445.

LAMPIRAN A

TEORI KISI GAUGE

1.1 Integral Lintas dalam Mekanika Kuantum

Kita tuliskan bentuk integral lintas dalam mekanika kuantum secara lengkap dengan memulai dari bentuk amplitudo transisi

$$\begin{aligned}\langle x', t' | x, t \rangle &= \langle x' | e^{-iH(t'-t)} | x \rangle \\ &= \langle x' | e^{-iHt'} e^{iHt} | x \rangle\end{aligned}$$

Kemudian didefinisikan

$$\begin{aligned}T &= t' - t \\ \Delta t &= t_1 - t\end{aligned}$$

Dengan mengurangkan keduanya, didapatkan

$$t' = T - \Delta t + t_1$$

$$\begin{aligned}\langle x', t' | x, t \rangle &= \langle x' | e^{-iH(T-\Delta t+t_1)} e^{iHt} | x \rangle \\ &= \langle x' | e^{-iH(T-\Delta t)} e^{-iH(t_1-t)} | x \rangle \\ &= \langle x' | e^{-iH(T-\Delta t)} e^{-iH\Delta t} | x \rangle\end{aligned}$$

Dengan memasukkan hubungan kelengkapan untuk keadaan eigen koordinat x

$$\mathbb{I} = \int dx_1 |x_1\rangle \langle x_1|$$

ke dalam elemen matriks, dan dengan menyatakan $T = (t' - t)$ dan $\Delta t = (t_1 - t)$ kita dapatkan amplitudo transisi

$$\langle x', t' | x, t \rangle = \int dx_1 \langle x' | e^{-iH(T-\Delta t)} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-iH(\Delta t)} | x \rangle$$

Kemudian kita bagi waktu T menjadi n bagian ($T = n\Delta t$), dan dengan memasukkan $(n-1)$ hubungan kelengkapan keadaan eigen kordinat x

$$\begin{aligned} \langle x', t' | x, t \rangle &= \int dx_1 \langle x' | e^{-iH(n\Delta t - \Delta t)} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-iH(\Delta t)} | x \rangle \\ &= \int dx_1 \langle x' | e^{-iH(n-1)\Delta t} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-iH\Delta t} | x \rangle \\ &= \int dx_1 \langle x' | \underbrace{e^{-iH\Delta t} e^{-iH\Delta t} e^{-iH\Delta t} \dots e^{-iH\Delta t}}_{n-1} | x_1 \rangle \\ &\quad \times \langle x_1 | e^{-iH\Delta t} | x \rangle \\ &= \int dx_1 \langle x' | \underbrace{e^{-iH\Delta t} \mathbf{I} e^{-iH\Delta t} \mathbf{I} e^{-iH\Delta t} \dots \mathbf{I} e^{-iH\Delta t}}_{n-1} | x_1 \rangle \\ &\quad \times \langle x_1 | e^{-iH\Delta t} | x \rangle \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \langle x', t' | x, t \rangle &= \int dx_1 \dots \int dx_{n-1} \langle x' | e^{-iH(\Delta t)} | x_{n-1} \rangle \\ &\quad \times \langle x_{n-1} | e^{-iH(\Delta t)} | x_{n-2} \rangle \dots \langle x_1 | e^{-iH(\Delta t)} | x \rangle \end{aligned}$$

dengan kita asumsikan $x = x_0$ dan $x' = x_n$, maka seluruh elemen matriks dapat dituliskan menjadi

$$\prod_{k=0}^{n-1} \langle x_{k+1} | e^{-iH\Delta t} | x_k \rangle$$

maka matriks tersebut dapat dijabarkan

$$\begin{aligned} \langle x_{k+1} | e^{-iH\Delta t} | x_k \rangle &= \langle x_{k+1} | e^{-iH\Delta t} e^{-iV(x)\Delta t} | x_k \rangle \\ &= \langle x_{k+1} | e^{-i\frac{p^2}{2m}\Delta t} | x_k \rangle e^{-iV(x)\Delta t} \end{aligned}$$

dengan hubungan kelengkapan momentum

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle \langle p|$$

maka

$$\langle x_{k+1} | e^{-iH\Delta t} | x_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-i\frac{p^2}{2m}\Delta t} \langle x_{k+1} | p \rangle \langle p | x_k \rangle e^{-iV(x_k)\Delta t}$$

dengan bentuk $\langle x | p \rangle$ di dapatkan melalui Lampiran A1.2 berupa

$$\langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}$$

sehingga dapat dituliskan

$$\langle x_{k+1} | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx_{k+1}}$$

dan

$$\begin{aligned} \langle p | x_k \rangle &= (\langle x_{k+1} | p \rangle)^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx_k} \end{aligned}$$

sehingga matriksnya dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \langle x_{k+1} | e^{-iH\Delta t} | x_k \rangle &= e^{-iV(x)\Delta t} \int dp e^{-i\frac{p^2}{2m}\Delta t} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx_{k+1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipx_k} \right) \\ &= \frac{e^{-iV(x)\Delta t}}{2\pi} \int dp e^{-i\frac{p^2}{2m}\Delta t} \\ &\quad \times e^{ip(x_{k+1}-x_k)} \end{aligned}$$

Kemudian dengan metode integral Gaussian, bentuk integral dapat dituliskan

$$\int dp e^{-i\frac{p^2}{2m}\Delta t + ip(x_{k+1} - x_k)} = \sqrt{\frac{2\pi}{i\Delta t/m}} \times \exp\left\{\frac{-(x_{k+1} - x_k)^2}{2i\Delta t/m}\right\}$$

maka

$$\langle x_{k+1} | e^{-iH(\Delta t)} | x_k \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi\Delta t}} \exp(i\Delta t \left(\frac{m}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} \right)^2 - V(x_k) \right))$$

Sehingga untuk seluruh elemen matriks dapat dituliskan

$$\langle x', t' | x, t \rangle = \int \frac{dx_1 \dots \int dx_{n-1}}{\left(\frac{2\pi i \Delta t}{m}\right)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(i \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t \left(\frac{m}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} \right)^2 - V(x_k) \right)\right)$$

Untuk bagian eksponensial dapat diubah menjadi aksi klasik dengan limit n mendekati ∞

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} \right)^2 - V(x_k) \right\} &= \int_0^T dt L(x, \dot{x}) \\ &= S(x) \end{aligned}$$

dan untuk bagian selain eksponensial

$$\int \frac{dx_1 \dots \int dx_{n-1}}{\left(\frac{2\pi i \Delta t}{m}\right)^{\frac{n}{2}}} = D_x$$

Sehingga amplitudo transisi pada mekanika kuantum dapat dituliskan dalam bentuk path integral

$$\langle x', t' | x, t \rangle = \int D_x e^{iS}$$

1.2 Bentuk Eksplisit dari $\langle x|p\rangle$

Bentuk di atas di dapat dari

$$\begin{aligned}\hat{P}|p\rangle &= p|p\rangle \\ \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}|p\rangle &= p|p\rangle\end{aligned}$$

kemudian dengan memasukkan $\langle x|$ sebagai representasi x pada fungsi momentum

$$\begin{aligned}\langle x|\left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}|p\rangle\right) &= \langle x|(p)|p\rangle \\ \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}\langle x|p\rangle &= p\langle x|p\rangle \\ \frac{d}{dx}\langle x|p\rangle &= \frac{ip}{\hbar}\langle x|p\rangle \\ \left(\frac{d}{dx} - \frac{ip}{\hbar}\right)\langle x|p\rangle &= 0\end{aligned}$$

sehingga didapatkan solusinya

$$\begin{aligned}\langle x|p\rangle &= Ce^{\frac{ipx}{\hbar}}; \hbar = 1 \\ &= Ce^{ipx}\end{aligned}$$

kemudian dari fungsi delta kita sisipkan hubungan kelengkapan

$$\begin{aligned}\delta(p, p') &= \langle p|p'\rangle \\ &= \langle p|\mathbf{I}|p'\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle p|x\rangle \langle x|p'\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx C^* e^{-ipx} C e^{ip'x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx |C|^2 e^{ix(p'-p)}\end{aligned}$$

Kemudian dengan fungsi delta-dirac secara umum

$$\delta(p, p') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx |C|^2 e^{ix(p'-p)}$$

maka konstantanya dapat dituliskan

$$\begin{aligned} |C|^2 &= \frac{1}{2\pi} \\ C &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

maka

$$\langle x|p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}$$

1.3 Batas Zona Brillouin Bentuk Pertama

Untuk mendapatkan batas Zona Brillouin yang telah dituliskan, maka dapat dilakukan dengan pendekatan Harmonik

$$F_n = C(U_{n+1} - U_n) + C(U_{n+1} - U_n)$$

dengan C : Konstanta Gaya Elastik (interatomik). Kemudian dengan menggunakan aplikasi hukum ke-2 Newton untuk gerak atom ke-n didapatkan

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 U_n}{dt^2} &= F_n \\ &= (U_{n+1} - U_n) + C(U_{n+1} - U_n) \\ &= -C(2U_n - U_{n+1} - U_{n-1}) \end{aligned}$$

Kita masukkan solusi umum dari U_n dengan $x_n = na$

$$\begin{aligned} U_n &= Ae^{i(kx_n - \omega t)} \\ &= Ae^{i(kna - \omega t)} \end{aligned}$$

Kita lakukan substitusi ke dalam persamaan di atas

$$\begin{aligned}
 M \frac{d^2}{dt^2} (Ae^{i(kna-\omega t)}) &= -C(2Ae^{i(kna-\omega t)} \\
 &\quad - Ae^{i(k(n+1)a-\omega t)} - Ae^{i(k(n-1)a-\omega t)}) \\
 MAe^{ikna}(-\omega^2)e^{-\omega t} &= -CAe^{-\omega t}[2e^{ikna} \\
 &\quad - e^{ik(n+1)a} - e^{ik(n-1)a}] \\
 M\omega^2 &= C[2 - e^{ika} - e^{-ika}] \\
 M\omega^2 &= 2C[1 - \frac{(e^{ika} + e^{-ika})}{2}] \\
 M\omega^2 &= 2C[1 - \cos ka] \\
 M\omega^2 &= 2C[2 \sin^2 \frac{ka}{2}] \\
 M\omega^2 &= 4C \sin^2 \frac{ka}{2} \\
 \omega^2 &= \frac{4C}{M} \sin^2 \frac{ka}{2} \\
 \omega &= 2\sqrt{\frac{C}{M}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|
 \end{aligned}$$

Frekuensi dan pergerakan atom tidak berubah ketika kita mengganti k dengan $k + \frac{2\pi}{a}$

Pada solusi umum pergerakan atom

$$\begin{aligned}
 U_n &= A \exp\{i(\frac{k + 2\pi}{a})na - \omega t\} \\
 &= Ae^{i(kn+2\pi n)-\omega t} \\
 &= Ae^{i(kn)-\omega t}
 \end{aligned}$$

dan frekuensi

$$\begin{aligned}
 \omega &= 2\sqrt{\frac{C}{M}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \\
 &\equiv \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \\
 &= \left| \sin \frac{(k + \frac{2\pi}{a})a}{2} \right| \\
 &= \left| \sin \left(\frac{ka}{2} + \pi \right) \right| \\
 &= \left| \sin \left(\frac{ka}{2} \right) \cos \pi + \cos \left(\frac{ka}{2} \right) \sin \pi \right| \\
 &= \left| -\sin \left(\frac{ka}{2} \right) \right| \\
 &= \left| \sin \left(\frac{ka}{2} \right) \right|
 \end{aligned}$$

Kedua hal di atas mengizinkan kita untuk mengatur batas zona brillouin bentuk pertama

$$-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$$

dengan hubungan

$$\begin{aligned}
 p &= \hbar k \\
 \hbar &= 1 \\
 p &= k
 \end{aligned}$$

maka batas dapat ditulis menjadi

$$-\frac{\pi}{a} \leq p \leq \frac{\pi}{a}$$

Batas ini diizinkan karena memenuhi pergantian k tadi

$$\begin{aligned}
 f(k) &= f\left(k + \frac{2\pi}{a}\right) \\
 f(-\pi/a) &= f\left(-\pi/a + \frac{2\pi}{a}\right) \\
 f(-\pi/a) &= f(\pi/a)
 \end{aligned}$$

1.4 Matriks Gamma

Matriks Gamma dalam ruang minkoswki dituliskan dengan

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \gamma^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \gamma^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Sedangkan matriks gamma dalam ruang Euclidean yang telah dilakukan perubahan dari ruang minkowski

$$\gamma_4^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1^E &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\gamma_2^E &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\gamma_3^E &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

1.5 Delta Dirac dalam Kisi

Kita mulai dari delta Dirac dalam 4-dimensi

$$\begin{aligned}
\delta(x - y) &= \delta(x_4 - y_4)\delta(x_1 - y_1) \\
&\quad \times \delta(x_2 - y_2)\delta(x_3 - y_3) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_4}{(2\pi)^4} e^{ik_4(x_4 - y_4)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)^4} e^{ik_1(x_1 - y_1)} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{(2\pi)^4} e^{ik_2(x_2 - y_2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_3}{(2\pi)^4} e^{ik_3(x_3 - y_3)}
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
k_1(x_1 - y_1) + k_2(x_2 - y_2) &+ k_3(x_3 - y_3) + k_4(x_4 - y_4) \\
&= \sum_{\mu=1}^4 k_{\mu}(x_{\mu} - y_{\mu}) \\
&= k \cdot (x - y)
\end{aligned}$$

maka

$$\delta(x - y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (x - y)}$$

1.6 Penyebut Invers Propagator Fermion

Pada bagian penyebut pers.(3.27)

$$\begin{aligned}
 [i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) \sin \hat{p}_{\mu} + \hat{M}] &\times -i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) \sin \hat{p}_{\mu} + \hat{M} \\
 &= (\sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E) \sin \hat{p}_{\mu})^2 + \hat{M}^2) \\
 &= ((\gamma_1^E \sin \hat{p}_1 + \gamma_{\mu}^E \sin \hat{p}_2) \\
 &\quad + (\gamma_3^E \sin \hat{p}_3 + \gamma_4^E \sin \hat{p}_4))
 \end{aligned}$$

agar memperingkas penjabaran, kita tuliskan setiap sukunya dengan

$$\begin{aligned}
 \gamma_1^E \sin \hat{p}_1 &= a \\
 \gamma_2^E \sin \hat{p}_2 &= b \\
 \gamma_3^E \sin \hat{p}_3 &= c \\
 \gamma_4^E \sin \hat{p}_4 &= a
 \end{aligned}$$

maka dapat ditulis untuk perkalian penyebut menjadi

$$\begin{aligned}
 &= ((a + b) + (c + d))(2) \\
 &= ((a + b) + (c + d))((a + b) + (c + d)) \\
 &= ((a + b)(a + b) + (a + b)(c + d) \\
 &\quad (c + d)(a + b) + (c + d)(c + d)) \\
 &= (a^2 + (ab + ba) + b^2 + (ac + ca) \\
 &\quad + (ad + da) + (bc + cb) + (bd + db) + c^2 + (cd + dc) + d^2) \\
 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \{a, b\} + \{a, c\} \\
 &\quad + \{a, d\} + \{b, c\} + \{b, d\} + \{c, d\}
 \end{aligned}$$

Kemudian bentuk perkalian dikembalikan kembali

sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E \sin \hat{p}_{\mu})^2 + \hat{M}^2 \right) &= \gamma_1^2 \sin^2 \hat{p}_1 + \gamma_2^2 \sin^2 \hat{p}_2 \\
 &\quad + \gamma_3^2 \sin^2 \hat{p}_3 + \gamma_4^2 \sin^2 \hat{p}_4 \\
 &\quad + (\gamma_1^E \gamma_2^E + \gamma_2^E \gamma_1^E) \sin \hat{p}_1 \sin \hat{p}_2 \\
 &\quad + (\gamma_1^E \gamma_3^E + \gamma_3^E \gamma_1^E) \sin \hat{p}_1 \sin \hat{p}_3 \\
 &\quad + (\gamma_1^E \gamma_4^E + \gamma_4^E \gamma_1^E) \sin \hat{p}_1 \sin \hat{p}_4 \\
 &\quad + (\gamma_2^E \gamma_3^E + \gamma_3^E \gamma_2^E) \sin \hat{p}_2 \sin \hat{p}_3 \\
 &\quad + (\gamma_2^E \gamma_4^E + \gamma_4^E \gamma_2^E) \sin \hat{p}_2 \sin \hat{p}_4 \\
 &\quad + (\gamma_3^E \gamma_4^E + \gamma_4^E \gamma_3^E) \sin \hat{p}_3 \sin \hat{p}_4 \\
 &= \gamma_1^2 \sin^2 \hat{p}_1 + \gamma_2^2 \sin^2 \hat{p}_2 \\
 &\quad + \gamma_3^2 \sin^2 \hat{p}_3 + \gamma_4^2 \sin^2 \hat{p}_4 \\
 &\quad + \{\gamma_1^E, \gamma_2^E\} \sin \hat{p}_1 \sin \hat{p}_2 \\
 &\quad + \{\gamma_1^E, \gamma_3^E\} \sin \hat{p}_1 \sin \hat{p}_3 \\
 &\quad + \{\gamma_1^E, \gamma_4^E\} \sin \hat{p}_1 \sin \hat{p}_4 \\
 &\quad + \{\gamma_2^E, \gamma_3^E\} \sin \hat{p}_2 \sin \hat{p}_3 \\
 &\quad + \{\gamma_2^E, \gamma_4^E\} \sin \hat{p}_2 \sin \hat{p}_4 \\
 &\quad + \{\gamma_3^E, \gamma_4^E\} \sin \hat{p}_3 \sin \hat{p}_4
 \end{aligned}$$

dengan hubungan antikomutasi

$$\{\gamma_{\mu}^E, \gamma_{\nu}^E\} = 2\delta_{\mu\nu}$$

dan

$$(\gamma_{\mu}^E)^2 = 1$$

maka

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{\mu} (\gamma_{\mu}^E \sin \hat{p}_{\mu})^2 + \hat{M}^2 \right) &= \sin^2 \hat{p}_1 + \sin^2 \hat{p}_2 \\
 &\quad + \sin^2 \hat{p}_3 + \sin^2 \hat{p}_4 + \hat{M}^2 \\
 &= \sum_{\mu} \sin^2 \hat{p}_{\mu} + \hat{M}^2
 \end{aligned}$$

1.7 Plakat pada Medan Non-Abelian

Dengan

$$\begin{aligned} i\tilde{\phi}_\mu(n) &= A \\ i\tilde{\phi}_\nu(n + \hat{\mu}) &= B \\ -i\tilde{\phi}_\mu(n + \hat{\nu}) &= C \\ -i\tilde{\phi}_\nu(n) &= D \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} e^A e^B e^C e^D &= e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+C+D+\frac{1}{2}[C,D]+\frac{1}{2}[B,C]} \\ &\times e^{+\frac{1}{2}[A,D]+\frac{1}{2}[A,C]+\frac{1}{2}[B,D]} \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\mu\nu}(n) &= \exp\{i(\tilde{\phi}_\mu(n) + \tilde{\phi}_\nu(n + \hat{\mu}) - \tilde{\phi}_\mu(n + \hat{\nu}) \\ &\quad - \tilde{\phi}_\nu(n) + \frac{1}{2}(i\tilde{\phi}_\mu(n)\tilde{\phi}_\nu(n + \hat{\mu}) \\ &\quad - i\tilde{\phi}_\nu(n + \hat{\mu})\tilde{\phi}_\mu(n)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(i\tilde{\phi}_\mu(n + \hat{\nu})\tilde{\phi}_\nu(n) \\ &\quad - i\tilde{\phi}_\nu(n)\tilde{\phi}_\mu(n + \hat{\nu})) \\ &\quad + \frac{1}{2}(-i\tilde{\phi}_\nu(n + \hat{\mu}) \\ &\quad + i\tilde{\phi}_\nu(n + \hat{\mu})\tilde{\phi}_\nu(n + \hat{\mu})) \\ &\quad + \frac{1}{2}(-i\tilde{\phi}_\mu(n)\tilde{\phi}_\nu(n) + i\tilde{\phi}_\nu(n)\tilde{\phi}_\mu(n)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(-i\tilde{\phi}_\mu(n)\tilde{\phi}_\mu(n + \hat{\nu}) \\ &\quad + \tilde{\phi}_\mu(n + \hat{\nu}) - i\tilde{\phi}_\mu(n)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(-i\tilde{\phi}_\nu(n + \hat{\mu})\tilde{\phi}_\nu(n) \\ &\quad + i\tilde{\phi}_\nu(n)\tilde{\phi}_\nu(n + \hat{\mu}))\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\{ig_0a(\tilde{A}_\mu(n) + \tilde{A}_\nu(n) + a\partial_\mu\tilde{A}_\nu(n) \\
&\quad - \tilde{A}_\mu(n) - a\partial_\nu\tilde{A}_\mu(n) - \tilde{A}_\nu(n) \\
&\quad + \frac{1}{2}i(ig_0a)(\tilde{A}_\mu(\tilde{A}_\nu(n) + a\partial_\mu\tilde{A}_\nu) \\
&\quad - (\tilde{A}_\nu(n) + a\partial_\mu\tilde{A}_\nu)\tilde{A}_\mu) \\
&\quad + \frac{1}{2}i(ig_0a)((\tilde{A}_\mu(n) + a\partial_\nu\tilde{A}_\mu)\tilde{A}_\nu \\
&\quad - \tilde{A}_\nu(\tilde{A}_\mu(n) + a\partial_\nu\tilde{A}_\mu)) \\
&\quad + \frac{1}{2}i(ig_0a)((\tilde{A}_\mu(n) + a\partial_\nu\tilde{A}_\mu)(\tilde{A}_\nu(n) + a\partial_\mu\tilde{A}_\nu) \\
&\quad - (\tilde{A}_\nu(n) + a\partial_\mu\tilde{A}_\nu)(\tilde{A}_\mu(n) + a\partial_\nu\tilde{A}_\mu)) \\
&\quad + \dots \\
&= \exp(ig_0a(a\partial_\mu\tilde{A}_\nu - a\partial_\nu\tilde{A}_\mu \\
&\quad + \frac{1}{2}ig_0a(\tilde{A}_\mu\tilde{A}_\nu + a\tilde{A}_\mu\partial_\mu\tilde{A}_\nu - \tilde{A}_\nu\tilde{A}_\mu \\
&\quad - a(\partial_\mu\tilde{A}_\nu)\tilde{A}_\mu + \tilde{A}_\mu\tilde{A}_\nu + a(\partial_\nu\tilde{A}_\mu)\tilde{A}_\nu \\
&\quad - \tilde{A}_\nu\tilde{A}_\mu - a\tilde{A}_\nu\partial_\nu\tilde{A}_\mu + \tilde{A}_\mu\tilde{A}_\nu \\
&\quad + a\tilde{A}_\mu(\partial_\mu\tilde{A}_\nu) + a(\partial_\nu\tilde{A}_\mu)\tilde{A}_\nu + a^2(\partial_\nu\tilde{A}_\mu)\partial_\mu\tilde{A}_\mu \\
&\quad - \tilde{A}_\nu\tilde{A}_\mu - a\tilde{A}_\nu(\partial_\nu\tilde{A}_\mu) - a(\partial_\mu\tilde{A}_\nu)\tilde{A}_\mu \\
&\quad - a^2(\partial_\mu\tilde{A}_\nu)\partial_\nu\tilde{A}_\mu + \tilde{A}_\nu\tilde{A}_\mu - \tilde{A}_\mu\tilde{A}_\nu \\
&\quad + \tilde{A}_\mu\tilde{A}_\nu + a(\partial_\nu\tilde{A}_\mu)\tilde{A}_\mu - \tilde{A}_\mu\tilde{A}_\nu \\
&\quad - a\tilde{A}_\mu\partial_\nu\tilde{A}_\mu + \tilde{A}_\nu\tilde{A}_\mu + a\tilde{A}_\nu\partial_\mu\tilde{A}_\nu \\
&\quad - \tilde{A}_\nu\tilde{A}_\nu - a(\partial_\mu\tilde{A}_\nu)\tilde{A}_\nu)) \\
&= \exp(ig_0a^2(\partial_\mu\tilde{A}_\nu - \partial_\nu\tilde{A}_\mu \\
&\quad + \frac{1}{2}ig_0(2(\tilde{A}_\mu\tilde{A}_\nu - \tilde{A}_\nu\tilde{A}_\mu))) \\
&= \exp\{ig_0a^2(\partial_\mu\tilde{A}_\nu - \partial_\nu\tilde{A}_\mu \\
&\quad + ig_0[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu]\}
\end{aligned}$$

1.8 Metode Monte Carlo untuk Menghitung Nilai Ekspektasi sebagai Putaran Wilson

Untuk menghitung nilai ekspektasi untuk mendapatkan W pada pers.(4.3) tidaklah mudah, karena terdapat integrasi tak-berhingga, sehingga diperlukan adanya metode numerik untuk melakukan perhitungan. Salah satu metode yang dapat

digunakan adalah metode Monte-Carlo. Dari sub bab 4.3, kita dapat melakukan perhitungan pada integral untuk nilai ekspektasi (4.3)

$$W = \frac{1}{Z} \int DA_\mu \text{tr} U e^{-S}$$

dengan kita tinjau bentuk integral

$$\int DA_\mu \text{tr} U e^{-S}$$

yang dapat dihitung dengan nilai-nilai acak untuk A_μ dan U serta perata-rataan. Tetapi prosedur ini tidak begitu efektif dikarenakan bentuk $\exp(-S)$ memiliki nilai yang sangat kecil pada hampir semua nilai acak dan oleh karena itu bentuk ini dapat diabaikan pada integrasi. Oleh karena itu diperlukan untuk melakukan distribusi pada nilai acak karena diperlukannya bentuk $\exp(-S)$ bernilai besar. Proses distribusi tersebut dilakukan dengan:

1. Kita mulai dengan susunan awal yang berubah-ubah $C = [A_\mu, U]$ seseorang membuat perubahan kecil dengan susunan C' . Probabilitas $p_0(C \rightarrow C')$ untuk perubahan ini memenuhi

$$p_0(C \rightarrow C') = p_0(C' \rightarrow C) \quad (1.1)$$

Satu kemungkinan untuk membuat sebuah modifikasi acak U pada beberapa *link* dengan titik terdekat.

2. Seseorang melakukan perhitungan selisih

$$\Delta S = S(C') - S(C)$$

Jika ΔS negatif, C diganti dengan C' . Jika ΔS positif, seseorang menggunakan bilangan acak dengan $0 \leq y \leq 1$ dan menggunakan C' jika $y < \exp(-\Delta S)$. Jika tidak, maka seseorang mempertahankan susunan C yang lama.

Sehingga probabilitas transisi pada pendekatan ini dapat dituliskan

$$\begin{aligned} p(C \rightarrow C') &= p_0(C \rightarrow C') \begin{cases} 1, & \text{untuk } \Delta S < 0 \\ e^{-\Delta S}, & \text{untuk } \Delta S > 0 \end{cases} \\ p(C' \rightarrow C) &= p_0(C' \rightarrow C) \begin{cases} e^{\Delta S}, & \text{untuk } \Delta S < 0 \\ 1, & \text{untuk } \Delta S > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

dan oleh karena itu

$$\frac{p(C \rightarrow C')}{p(C' \rightarrow C)} = e^{-\Delta S} \quad (1.2)$$

dengan

$$\sum_{C'} p(C \rightarrow C') = 1$$

Pers(1.2) menunjukkan

$$\begin{aligned} \sum_C e^{-S(C)} p(C \rightarrow C') &= \sum_C e^{-S(C')} p(C' \rightarrow C) \\ &= e^{-S(C')} \end{aligned}$$

Jika susunan C terdistribusi "Boltzmann", begitu pula susunan C' . Distribusi Boltzmann tersebut menjadi *fixpoint* pada algoritma yang kita pakai, dan tentunya banyak distribusi $P(C)$ yang berubah-ubah pada susunan mendekati *fixpoint* pada algoritma. Setiap langkah memetakan $P(C)$ ke dalam distribusi baru $P(C')$:

$$P(C') = \sum_C P(C) p(C \rightarrow C') \quad (1.3)$$

Jarak E dari $P(C)$ pada distribusi Boltzmann adalah

$$E = \sum_C |P(C) - N e^{-S(C)}| \quad (1.4)$$

dengan N konstanta normalisasi. Dengan transformasi(1.3), E berubah sesuai

$$\begin{aligned}
 E \rightarrow E' &= \sum_{C'} |P(C') - Ne^{-S(C')}| \\
 &= \sum_{C'} \left| \sum_C P(C) p(C \rightarrow C') - Ne^{-S(C')} \right| \\
 &= \sum_{C'} \left| \sum_C p(C \rightarrow C') [P(C) - Ne^{-S(C)}] \right| \\
 &\leq \sum_{C', C} p(C \rightarrow C') |P(C) - Ne^{-S(C)}| \\
 &= \sum_C |P(C) - Ne^{-S(C)}| \\
 &= E
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

dan memasukan ke hubungan

$$\sum_C (P(C) - Ne^{-S(C)}) = 0 \tag{1.6}$$

yang menyatakan fakta bahwa $P(C)$ dan $Ne^{-S(C)}$ ternormalisasi menjadi satu, $E_{C'}$ semata-mata lebih kecil dari E_C selama $P(C)$ berbeda dari $N \exp(-S(C))$.

Ini yang dinamakan sebagai "Algoritma Metropolis", berdasarkan waktu ekuilibrium yang sesuai, menghasilkan susunan acak yang terdistribusi distribusi Boltzmann. Jika C_i adalah susunan yang sedemikian rupa, integral pers. (4.3) pada bab 4 secara sederhana dituliskan

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(C_i) \tag{1.7}$$

Pada perhitungan yang sebenarnya seseorang memilih $p_0(C \rightarrow C')$ sedemikian rupa sehingga perata-rataan dapat dilakukan secara pasti tetapi tidak dengan area yang sangat besar

sekitar susunan C untuk S minimal. Kriteria yang lazim dengan memilih $p_0(C \rightarrow C')$ sedemikian rupa dengan setiap modifikasi $C \rightarrow C'$ diterima. Untuk ekuilibrasi awal, $p_0(C \rightarrow C')$ harus memungkinkan perubahan yang besar, tetapi ketika mendekati distribusi Boltzmann maka variasi $C \rightarrow C'$ menjadi lebih kecil. Metode selanjutnya dilakukan dengan metode numerik.

1.9 Potensial Quark Statis dan Tegangan Dawai

Potensial quark statis yang ditunjukkan oleh Wilson didapatkan dengan hubungan (4.13)

$$V(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \langle W(R, T) \rangle$$

dengan W

$$\langle W(R, T) \rangle = \frac{1}{3Z} \int D[U] e^{-S} \text{tr} U_P \quad (1.8)$$

dengan bentuk di atas dijabarkan, dengan

$$\begin{aligned} \int d[U(l_i)] 1 &= 1, \\ \int d[U(l_i)] U_{mn}(l_i) &= 0, \\ \int d[U(l_i)] U_{mn}(l_j) U_{pq}^*(l_k) &= \frac{1}{3} \delta_{mq} \delta_{np} \delta_{l_j l_k} \end{aligned}$$

maka bentuk putaran Wilson di atas sama dengan nol kecuali setiap variabel *link* $U(l)$ diimbangi dengan $U^{-1}(l)$. Maka kita bisa menuliskan hubungan

$$\int D[U] U_{ij}(l) U_{mn}^*(l) = \frac{1}{3} \delta_{in} \delta_{jm} \quad (1.9)$$

Bentuk pertama kontribusi yang tidak lenyapakan disebabkan oleh bentuk ke- $(R.T/a^2)$ dari deret, dengan $I =$

R/a dan $J = T/a$,

$$\langle W \rangle \sim \frac{1}{3Z} \int D[U] \left\{ \beta \sum_{\square} \frac{1}{3} \text{Re}[\text{tr}(U_{\square})] \right\}^{I \cdot J} \frac{1}{(I \cdot J)!} \text{tr}[U(C)]$$

dari bentuk (1.9) kita dapatkan faktor $1/3$ untuk setiap link. Jumlah link tersebut adalah $2I \cdot J + I + J$, Faktor untuk jumlah permutasi plakat $(I \cdot J)!$, sehingga

$$\left\{ \beta \sum_{\square} \frac{1}{3} \text{Re}[\text{tr}(U_{\square})] \right\}^{I \cdot J} = \left\{ \frac{\beta}{6} \sum_{\square} [\text{tr}(U_{\square}) + \text{tr}(U_{\square}^{\dagger})] \right\}^{I \cdot J}$$

yang menghasilkan faktor yang lebih jauh berupa $(\beta/6)^{I \cdot J}$. Oleh karena itu kita dapatkan

$$\begin{aligned} \langle W(R, T) \rangle &= \frac{1}{3Z} \left(\frac{\beta}{6} \right)^{I \cdot J} \left(\frac{1}{3} \right)^{2I \cdot J + I + J} \\ &\times \sum_{i_1, \dots, i_{4I \cdot J + 2(I+J)}=1}^3 \underbrace{\delta_{i_1 i_n} \dots \delta_{i_m i_{4I \cdot J + 2(I+J)}}}_{[3IJ + I + J - 1] \text{deltaKronecker}}^{(1,10)} \end{aligned}$$

di sini kita menggunakan integrasi terhadap $D[U]$ yang menghasilkan dua delta kronecker pada setiap *link*. Sehingga total delta menjadi $2 \cdot [2I \cdot J + I + J]$. Tetapi satu delta pada titik kisi terkandung pada kisi lainnya. Karena terdapat $(I + J)(J + 1)$ titik kisi, maka didapatkan

$$\begin{aligned} 2[2I \cdot J + I + J] - (I + 1)(J + 1) &= 4I \cdot J + 2I + 2J \\ &\quad - I \cdot J - I - J - 1 \\ &= 3I \cdot J + I + J - 1 \end{aligned}$$

delta Kronecker.

Sekarang kita hitung bilangan indeks penjumlahan. Setiap plakat menyumbang empat indeks dan Putaran Wilson $2(I +$

J) indeks, dua jumlah tersebut sesuai dengan jumlah titik kisi yang bersangkutan. Oleh karena itu jumlah indeks sumasi

$$4I \cdot J + 2(I + J) \quad (1.11)$$

$3I \cdot J + I + J - 1$ pada penjumlahan ini menghapus bentuk delta Kronecker, dan penjumlahan yang tersisa menghasilkan faktor 3 masing-masingnya. Sehingga dengan orde terendah $1/Z$ sama dengan satu kita dapatkan

$$\begin{aligned} \langle W(R, T) \rangle &= \frac{1}{3} \left(\frac{\beta}{6} \right)^{I \cdot J} \left(\frac{1}{3} \right)^{2I \cdot J + I + J} 3^{4I \cdot J + 2(I + J) - (3I \cdot J + I + J - 1)} \\ &= \left(\frac{\beta}{6} \right)^{I \cdot J} 3^{-I \cdot J} \\ &= \left(\frac{\beta}{18} \right)^{I \cdot J} \\ &= \left(\frac{\beta}{18} \right)^{RT/a^2} \end{aligned}$$

maka bentuk potensial dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} V(R) &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \langle W(R, T) \rangle \\ &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \left(\frac{\beta}{18} \right)^{RT/a^2} \\ &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{a^2} \log \frac{\beta}{18} \cdot R \end{aligned}$$

Pada limit temperatur tinggi tetapan dawai (tegangan) dari SU(3) dan dengan hubungan

$$V(R) = K \cdot R$$

maka

$$K = \frac{1}{a^2} \log \frac{\beta}{18}$$

Untuk perhitungan numerik selanjutnya dapat dituliskan

$$K_{num} = -\frac{1}{a^2} \ln \frac{W(R, T)W(R - a, T - a)}{W(R, T - a)W(R - a, T)} \quad (1.12)$$

Bentuk di atas adalah contoh untuk mendapatkan konstanta dawai (tegangan) K , selanjutnya pada perhitungan digunakan aksi *Tadpole-Improved* pada pers. (4.11). Namun, prosedur tersebut menjadi sangat rumit sehingga diperlukan metode numerik untuk *fitting*/pencocokan, seseorang [53] telah melakukan simulasi pada superkomputer Dec Alpha dan Origin2000. Hasil simulasi tersebut berupa parameter potensial yang ditunjukkan pada tabel 1.

1.10 Teori Grup

1.10.1 Parameter Bebas SU(N)

Teori grup adalah teori matematika tentang sekumpulan himpunan. Teori grup memiliki beberapa sifat diantaranya: 1)closure, 2)asosiatif, 3)elemen unit, dan 4)inverse.

- 1) closure: $a(\alpha).b(\beta) = c(\gamma)$; dengan $\gamma = \alpha + \beta$.
- 2) asosiatif: $a(bc) = (ab)c$.
- 3) elemen unit: $ae = ea = a$.
- 4) inverse: a^{-1} , $aa^{-1} = e$.

Diantara contoh grup yang biasa digunakam secara umum yaitu grup siklik(C_n), grup permutasi(S_n), dan grup uniter(U(N)). Dalam karya tulis ini menggunakan tinjauan grup SU(3) yang merupakan subgrup dari grup SU(N).

Grup uniter memiliki beberapa aturan:

- 1) $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$
- 2) Hermit, secara umum banyak matriks uniter dituliskan dalam bentuk

$$U = e^{iH} \quad (1.13)$$

di mana H nxn matriks hermitian. Untuk pembuktian bahwa matriks U hermit, maka ditunjukkan:

$$\begin{aligned}
 U^\dagger U &= 1 \\
 e^{-iH^\dagger} e^{iH} &= e^0 \\
 -i(H^\dagger - H) &= 0 \\
 (H^\dagger - H) &= 0 \\
 H^\dagger &= H
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Kemudian dengan pers. (1.14), maka bentuk determinan dapat ditulis

$$\begin{aligned}
 \det U^\dagger \det U &= (\det U)^* \det U \\
 &= |\det U|^2 \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Seperti yang disebutkan diatas, grup uniter mempunyai subgrup uniter spesial atau *special unitary* (SU(N)). Syarat untuk grup SU(N) sendiri sama dengan grup U(N), hanya saja grup SU(N) memiliki syarat tambahan dari pers. (1.15) yaitu:

$$\det(U) = 1 \tag{1.16}$$

Kemudian dengan melakukan transformasi S agar U menjadi U' , maka

$$\begin{aligned}
 \det U &= \det U' \\
 &= \det S U S^{-1} \\
 &= \det \begin{bmatrix} U'_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U'_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & U'_{nn} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

dengan U' memiliki bentuk di atas, maka matriks H berbentuk diagonal juga

$$\begin{aligned}
 \det U &= \det U' \\
 &= \det e^{iH'} \\
 &= \det \exp i \begin{bmatrix} H'_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H'_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & H'_{nn} \end{bmatrix} \\
 &= \det \begin{bmatrix} e^{iH'_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{iH'_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & e^{iH'_{nn}} \end{bmatrix} \\
 &= e^{i(H'_{11} + H'_{22} + \dots + H'_{nn})} \\
 &= e^{i\text{Tr } H'}
 \end{aligned}$$

dengan melakukan transformasi

$$\begin{aligned}
 \text{Tr } H' &= \text{Tr } SH'S^{-1} \\
 &= \text{Tr } H'SS^{-1} \\
 &= \text{Tr } H
 \end{aligned}$$

maka

$$\det U = e^{i\text{Tr } H}$$

Kemudian dengan mendefinisikan

$$\text{Tr } H = \alpha \quad (1.17)$$

di mana $\alpha = \text{real}$, dan dengan pers. (1.16)

$$\begin{aligned}
 \det U &= 1 \\
 \det(e^{iH}) &= e^0 \\
 e^{i\text{Tr } H} &= e^0 \\
 e^{i\alpha} &= e^0
 \end{aligned}$$

maka didapatkan $\alpha = 0$

$SU(N)$ merupakan subgrup dari grup $U(N)$, oleh karena itu kita menyatakan sebuah elemen dari $SU(N)$ dengan U_0 , maka pers. (1.17) dapat dijabarkan, dengan

$$\begin{aligned} U_0 &= e^{iH_0} \\ \text{Tr } H_0 &= 0 \\ \det U_0 &= 1 \end{aligned}$$

Selanjutnya elemen grup $U(N)$ dapat dituliskan

$$\begin{aligned} U &= e^{iH} \\ &= \exp \left[i \left(H_0 + \frac{\alpha}{n} 1 \right) \right] \\ &= U_0 \left[\exp \left(i \frac{\alpha}{n} \right) 1 \right] \end{aligned}$$

dan bentuk *Trace*

$$\begin{aligned} \text{Tr } H &= \text{Tr } H_0 + \text{Tr } \frac{\alpha}{n} 1 \\ &= \frac{\alpha}{n} \text{Tr } 1 \\ &= \frac{\alpha}{n} n \\ &= \alpha \end{aligned}$$

dan dengan $\alpha = 0$, maka

$$\text{Tr } H = 0 \tag{1.18}$$

Oleh karena itu dari penjabaran di atas dapat diketahui bahwa grup $SU(N)$ adalah tak memiliki trace (*traceless*).

Kemudian untuk grup uniter secara umum, komponennya harus memenuhi bilangan real dan imajiner sehingga secara umum dapat dituliskan

$$H_{mn} = f_{mn} + ib_{mn}$$

Kemudian kita ingin membuktikan bahwa grup $SU(N)$ memiliki parameter bebas sebesar $N^2 - 1$. Untuk matriks $N=2$ (dimensi 2×2), maka

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{11} + ib_{11} & f_{12} + ib_{12} \\ f_{21} + ib_{21} & f_{22} + ib_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

diketahui H memiliki parameter bebas 8 atau dapat dituliskan $2N^2$. Untuk H^\dagger atau konjugasi H dapat dituliskan:

$$\begin{aligned} H^\dagger &= (H^*)^T \\ &= \left(\begin{pmatrix} f_{11} + ib_{11} & f_{12} + ib_{12} \\ f_{21} + ib_{21} & f_{22} + ib_{22} \end{pmatrix}^* \right)^T \\ &= \begin{bmatrix} f_{11} - ib_{11} & f_{12} - ib_{12} \\ f_{21} - ib_{21} & f_{22} - ib_{22} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} f_{11} - ib_{11} & f_{21} - ib_{21} \\ f_{12} - ib_{12} & f_{22} - ib_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kemudian diketahui matriks H hermit

$$H = H^\dagger$$

maka

$$\begin{pmatrix} f_{11} + ib_{11} & f_{12} + ib_{12} \\ f_{21} + ib_{21} & f_{22} + ib_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} - ib_{11} & f_{21} - ib_{21} \\ f_{12} - ib_{12} & f_{22} - ib_{22} \end{pmatrix}$$

Kita tinjau untuk bagian diagonal:

$$\begin{aligned} f_{11} + ib_{11} &= f_{11} - ib_{11} \\ 2ib_{11} &= 0 \\ b_{11} &= 0 \end{aligned}$$

maka dapat diambil kesimpulan

$$b_{mm} = 0$$

Kemudian kita tinjau untuk selain diagonal:

$$\begin{aligned} f_{12} + ib_{12} &= f_{21} - ib_{21} \\ f_{12} - ib_{12} &= f_{21} + ib_{21} \end{aligned}$$

Kita eliminasi kedua persamaan di atas sehingga didapatkan bahwa

$$\begin{aligned} f_{mn} &= f_{nm} \\ b_{mn} &= -b_{nm} \end{aligned}$$

yang bermakna salah satu sisi dapat mewakili sisi yang lain.

Kemudian diketahui syarat terakhir yaitu bahwa matriks tak memiliki trace.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(H) &= 0 \\ &= f_{11} + f_{22} \end{aligned}$$

Maka didapatkan

$$f_{11} = -f_{22}$$

berarti 1 parameter diagonal bisa diwakilkan.

Begitu pula untuk parameter bebas dari grup $\text{SU}(N)$ secara umum dengan

$$\begin{aligned} \hat{H}_{pq} &= c_{pq} + id_{pq} \\ \hat{H} &= \begin{bmatrix} c_{11} + id_{11} & c_{12} + id_{12} & \dots & c_{1N} + id_{1N} \\ c_{21} + id_{21} & c_{22} + id_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{N1} + id_{N1} & c_{N2} + id_{N2} & \dots & c_{NN} + id_{NN} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.19)$$

bentuk ini memiliki $2N^2$ parameter bebas, yang mana kita dapat pecah menjadi $2N$ dan $2N^2 - 2N$. Kemudian dengan

$$\hat{H}^\dagger = (\hat{H}^T)^*$$

maka didapatkan

$$\hat{H}^\dagger = \begin{bmatrix} c_{11} - id_{11} & c_{21} - id_{21} & \dots & c_{N1} - id_{N1} \\ c_{12} - id_{12} & c_{22} - id_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{1N} - id_{1N} & c_{2N} - id_{2N} & \dots & c_{NN} - id_{NN} \end{bmatrix}$$

Karena matriksnya bersifat Hermitian maka

$$\hat{H} = \hat{H}^\dagger$$

Untuk bagian diagonal

$$\begin{aligned} c_{NN} + id_{NN} &= c_{NN} - id_{NN} \\ d_{NN} &= 0 \end{aligned}$$

maka jumlah parameter bebasnya menjadi $2N - N$ dan $2N^2 - 2N$. Untuk elemen matriks selain suku diagonal maka didapatkan bentuk

$$\begin{aligned} c_{NO} &= c_{ON} \\ d_{NO} &= -d_{ON} \end{aligned}$$

yang mana menunjukkan bahwa masing-masing sisi menggambarkan sisi yang lainnya. Hal ini membuat parameter bebas menjadi $2N - N$ dan $\frac{2N^2 - 2N}{2} = N^2 - N$.

Lalu telah diketahui bahwa syarat grup SU(N) adalah *traceless*, dengan pers. (1.18)

$$\text{Tr} H = 0$$

maka ditunjukkan

$$c_{11} = -(c_{22} + \dots + c_{NN})$$

yang berarti satu suku diagonal dapat menunjukkan suku diagonal yang lain sehingga parameter bebas menjadi berkurang satu parameter. Sehingga parameter bebasnya sekarang menjadi $N^2 - N + 2N - N - 1$ atau sama dengan $N^2 - 1$ untuk parameter bebas grup SU(N).

1.10.2 Aljabar Lie SU(3)

SU(3) memiliki delapan generator $(N = 3)^2 - 1 = 8$ yang diwakilkan oleh matriks Gell Mann [25] dengan

$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\lambda}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\lambda}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \hat{\lambda}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\lambda}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\lambda}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \hat{\lambda}_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \hat{\lambda}_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Dari matriks Gell-Mann yang telah dituliskan pada persamaan (1.20), didapatkan hubungan komutasi

$$[\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j]_- = 2if_{ijk}\hat{\lambda}_k \tag{1.21}$$

dengan f_{ijk} adalah tetapan struktur yang mana secara total antisimetri terhadap perubahan dua indeks.

$$f_{ijk} = -f_{jik} = -f_{ikj}, \text{ dsb}$$

Didapatkan pula hubungan anti komutasi

$$[\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j]_+ = \frac{4}{3}\delta_{ij}1 + 2d_{ijk}\hat{\lambda}_k$$

dengan d_{ijk} adalah koefisien simetri yang bernilai tetap ketika indeksnya berubah posisi.

Didefinisikan pula hubungan *trace* antara dua matriks tersebut dengan

$$\text{Tr } \hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j = 2\delta_{ij} \tag{1.22}$$

LAMPIRAN B

KODE UNTUK SIMULASI

2.1 Putaran Wilson

```
/****** w_loop1.c *****/
/* MIMD version 7 */
/* This version uses gathers to get the neighbors */
/* version of 3/14/94 by UMH */
/* 2/19/98 Version 5 port CD */

/* Computes time-like, planar Wilson loops on gauge
configuration
in axial gauge with time-like gauge fields of last
time slice
in all other time slices as well, instead of the unit
matrix! */

#include "hvy_qpot_includes.h"

void w_loop1(int tot_smeas) {

    register int i,dir,r,t;
    int nth,nxh;
    register site *s;
    su3_matrix tmat1,tmat2;
    msg_tag *mtag[4];
    Real *wils_loop1,tmp;
    su3_matrix *s_link, *s_link_f, *t_link_f;

    if( nx != ny || nx != ny){
```

```

if(this_node == 0)printf("w_loop1 gives wrong
results for nx!=ny!=nz");
return;
    }

//AB    nth = nt/2;  nxh = nx/2;
//CD    nth = nt;   nxh = nx/2;
    nth = max_t; nxh = nx/2;
    wils_loop1 = (Real *)malloc(nth*nxh*sizeof(Real));
    for(t=0;t<nth;t++) for(r=0;r<nxh;r++){
wils_loop1[r+nxh*t] = 0.0;
    }

    /* Allocate space for space-link product */
    s_link =
        (su3_matrix *)malloc(sites_on_node*sizeof(su3_matrix));
    if(s_link == NULL){
        fprintf(stderr,"hybrid_loop1: CAN'T MALLOC
s_link\n");
        fflush(stderr);
        terminate(1);
    }

    /* Allocate space for space-link product */
    s_link_f =
        (su3_matrix *)malloc(sites_on_node*sizeof
(su3_matrix));
    if(s_link_f == NULL){
        fprintf(stderr,"hybrid_loop1: CAN'T MALLOC
s_link_f\n");
        fflush(stderr);
        terminate(1);
    }

```



```

/* Allocate space for time-link */ /* NOT NEEDED */
t_link_f =
    (su3_matrix *)malloc(sites_on_node*sizeof
        (su3_matrix));
if(t_link_f == NULL){
    fprintf(stderr,"hybrid_loop1: CAN'T MALLOC
        t_link_f\n");
    fflush(stderr);
    terminate(1);
}

for(dir=XUP;dir<=ZUP;dir++){

FORALLSITES(i,s){
    su3mat_copy( &(s->link[dir]), s_link+i);
    su3mat_copy( &(s->link[TUP]), t_link_f+i);
}

/* Start gather of forward time-like links */
mtag[0] = start_gather_field(
    (void *)t_link_f, sizeof(su3_matrix),
    dir, EVENANDODD, gen_pt[0] );

/* Recursively construct the space-like segments
and compute the Wilson loops with that segment */

for(r=0;r<nxh;r++){

    if ( r>0 ){
        /* Collect the space-like segment and extend
        it by one link */
        wait_gather( mtag[1]);
    }
}

```

```

FORALLSITES(i,s){
    su3mat_copy( (su3_matrix *) (gen_pt[1][i]),
        &(s->staple));
}
FORALLSITES(i,s){
    mult_su3_nn( &(s->link[dir]),
        &(s->staple), s_link+i);
}

    }

    /* Prepare the forward space-like segment for parallel
       transport in time */
    FORALLSITES(i,s){
su3mat_copy( s_link+i, s_link_f+i);
    }

    /* Start gather of forward space-like segments for
       next t */
    mtag[TUP] = start_gather_field(
        (void *)s_link_f, sizeof(su3_matrix),
        TUP, EVENANDODD, gen_pt[TUP] );

    /* Concurrently gather space-like segment for
       next r, if
       still needed. */
    if( r==0 ){
mtag[1] = start_gather_field(
    (void *)s_link, sizeof(su3_matrix),
    dir, EVENANDODD, gen_pt[1] );
    }
    else if( r<(nxh-1) ){
restart_gather_field(
    (void *)s_link, sizeof(su3_matrix),

```

```

    dir, EVENANDODD, gen_pt[1], mtag[1] );
    }
    else{
cleanup_gather( mtag[1]);
    }

    /* Collect forward time-like links. */
    wait_gather( mtag[0]);
    FORALLSITES(i,s){
su3mat_copy( (su3_matrix *) (gen_pt[0][i]),
&(s->staple));
    }
    FORALLSITES(i,s){
su3mat_copy( &(s->staple), t_link_f+i);
    }

    /* Recursively compute the Wilson loops of different
time extent */
    for(t=0;t<nth;t++){

/* Collect forward space-like segments */
wait_gather( mtag[TUP]);
FORALLSITES(i,s){
    su3mat_copy( (su3_matrix *) (gen_pt[TUP][i]),
    &(s->staple));
}
FORALLSITES(i,s){
    su3mat_copy( &(s->staple), s_link_f+i);
}

/* Start gather for next t, if still needed. */
if( t<(nth-1) ){
    restart_gather_field(

```

```

        (void *)s_link_f, sizeof(su3_matrix),
        TUP, EVENANDODD, gen_pt[TUP], mtag[TUP] );
    }
    else{
        cleanup_gather( mtag[TUP]);
    }

    /* Finally, compute the Wilson loops. */
    FORALLSITES(i,s){
        /* If the loop extends past t = Nt - 1 the temporal
           axial gauge link is nontrivial */
        if( ((s->t)+t+1)>=nt ){
            mult_su3_nn( &(s->link[TUP]),
                s_link_f+i, &tmat1);
            mult_su3_na( &tmat1, t_link_f+i, &tmat2);
            wils_loop1[r+nxh*t] +=
                realtrace_su3( &tmat2, s_link+i);
        }
        else
        {
            wils_loop1[r+nxh*t] +=
                realtrace_su3( s_link_f+i, s_link+i);
        }
    }

    } /* end loop over t */

    /* Start gather of forward time-like links for
       next r. */
    if( r<(nxh-1) ){
        restart_gather_field(
            (void *)t_link_f, sizeof(su3_matrix),
            dir, EVENANDODD, gen_pt[0], mtag[0] );
    }

```

```

    }
    else{
cleanup_gather( mtag[0]);
    }

} /* end loop over r */

    } /* end loop over dir */

    /* Normalize and print the Wilson loops */
    for(t=0;t<nth;t++) for(r=0;r<nxx;r++){
ftmp = wils_loop1[r+nxh*t];
g_floatsum( &ftmp);
ftmp /= (Real)(9*volume);
if(this_node == 0)printf("WILS_LOOP1_%d
%d %d %e\n",
    tot_smear, r, t, (double)ftmp);
    }

    free( wils_loop1);
    free(s_link);
    free(s_link_f);
    free(t_link_f);

} /* w_loop1 */

```

2.2 Aksi Gauge

```

/* Loop tables for glueball operators */
#ifdef GAUGE_ACTION_PART1
/* defines NREPS NLOOP MAX_LENGTH MAX_NUM */
#define NREPS 1
#define NLOOP 4
#define MAX_LENGTH 6
#define MAX_NUM 16

```

```

#define SPATIAL_ONLY
#endif

#ifdef GAUGE_ACTION_PART2
    static int loop_ind[NLOOP][MAX_LENGTH] = {
        { XUP, YUP, XDOWN, YDOWN, NODIR, NODIR },
        /* plaquette */
        { XUP, XUP, YUP, XDOWN, XDOWN , YDOWN},
        /* 1x2 loop */
        { XUP, YUP, ZUP, YDOWN, XDOWN , ZDOWN},
        /* chair */
        { XUP, YUP, ZUP, XDOWN, YDOWN , ZDOWN},
        /* equator of cube */
    };
    static int loop_length_in[NLOOP] = {4,6,6,6};

    for(j=0;j<NLOOP;j++){
loop_num[j] = 0;
loop_length[j] = loop_length_in[j];
for(i=0;i<NREPS;i++){
    loop_coeff[j][i] = 0.0;
}
    }

    /* Loop coefficients from Urs */
    loop_coeff[0][0]= 1.0;
    loop_coeff[1][0]= 1.0;
    loop_coeff[2][0]= 1.0;
    loop_coeff[3][0]= 1.0;
    strcpy(gauge_action_description,"\"Glueball 1x1,
1x2, chair, oval\"");
    node0_printf("Glueball ops 1x1, 1x2, chair, oval\n");

```

```
#endif
```

2.3 Pelumasan

```

/***** smearing.c*****/

/* MIMD version 7 */
/* original version of 5/23/94 by UMH */
/* 2/19/98 Version 5 port CD */
/* 11/25/01 Removed redundant code. Changed to
call ape_smear_dir CD */

/* Perform one iteration of "APE smearing" on the
space-like links.
   For the projection back to SU(3) use multiples of
   3 hits over the
   3 different SU(2) subgroups until the procedure
   converges.
   Note: only this complete projection makes the
   smearing truly gauge invariant. */

#include "hvy_qpot_includes.h"
#define TOL 1e-5
#define MAXCOUNT 50

void smearing( void ) {
    register int dir,i;
    register site *s;
    su3_matrix *x_link, *y_link, *z_link;

    /* Allocate space for temporary storage of results */
    x_link =
        (su3_matrix *)malloc(sites_on_node*sizeof
        (su3_matrix));
    if(x_link == NULL){

```

```

    fprintf(stderr,"smearing: CAN'T MALLOC x_link\n");
    fflush(stderr);
    terminate(1);
}

/* Allocate space for temporary storage of results */
y_link =
    (su3_matrix *)malloc(sites_on_node*sizeof(su3_matrix));
if(y_link == NULL){
    fprintf(stderr,"smearing: CAN'T MALLOC y_link\n");
    fflush(stderr);
    terminate(1);
}

/* Allocate space for temporary storage of results */
z_link =
    (su3_matrix *)malloc(sites_on_node*sizeof(su3_matrix));
if(z_link == NULL){
    fprintf(stderr,"smearing: CAN'T MALLOC z_link\n");
    fflush(stderr);
    terminate(1);
}

/* Loop over the space directions and APE-smear the
links.
    The results will temporarily be stored in x_link,
    y_link
    and z_link for dir=XUP, YUP and ZUP and copied do
    link[dir]
    at the end. */

for(dir=XUP;dir<=ZUP;dir++){

```



```

/* Do the APE smearing and SU(3) projection for all
links in dir */
ape_smeas_dir(F_OFFSET(link[0]),dir,F_OFFSET(diag),
1./smear_fac,1.,1,3*MAXCOUNT,TOL);

/* Storage management: Temporarily store the
new link */
FORALLSITES(i,s){
    switch (dir){
        case XUP:
su3mat_copy( &(s->diag), x_link+i );
break;
        case YUP:
su3mat_copy( &(s->diag), y_link+i );
break;
        case ZUP:
su3mat_copy( &(s->diag), z_link+i );
break;
        default:
if(this_node == 0)printf("unknown direction %d\n", dir);
break;
    }

}

} /* end loop over dir */

/* Now copy the smeared links, overwriting the
previous ones */
FORALLSITES(i,s){
    su3mat_copy( x_link+i, &(s->link[XUP]) );
    su3mat_copy( y_link+i, &(s->link[YUP]) );
    su3mat_copy( z_link+i, &(s->link[ZUP]) );

```

```

    }

    free(x_link);
    free(y_link);
    free(z_link);

} /* smearing */
/***** hvy_qpot_includes.h *****/
/*
 * Include files for heavy quark potential
 * application
 */

/* Include files */
#include "../include/config.h" /* Keep this first */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include "../include/complex.h"
#include "../include/su3.h"
#include "../include/macros.h"
#include "lattice.h"
#include "../include/comdefs.h"
#include "../include/io_lat.h"
#include "../include/generic.h"
#include "../include/dirs.h"

void ax_gauge();
int setup();
int readin(int prompt);
void gball_simp(int tot_smear);
void smearing(void);
void w_loop1(int tot_smear);

```

```
void w_loop2(int tot_smear);  
void hybrid_loop1(int tot_smear);
```


BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama Bayu Aslama Zulfikar Ahmad, biasa dipanggil Bayu. Penulis lahir di Surabaya, 1 Februari 1996. Penulis merupakan putra dari Bapak Drs. Mujo Basuki dan Ibu Rahayu Purbasari. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Bani Shaleh Bekasi (2001-2002), SDIT Al-Manar Bekasi (2002-2008), SMPIT Darul Hikmah Bekasi (2008-2011), dan MA Negeri 1 Bekasi (2011-2014). Kemudian penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Fisika ITS Surabaya pada tahun 2014 dengan NRP 1114100077. Di Jurusan Fisika, penulis mengambil Bidang Minat Fisika Teori.

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditunjukkan ke penulis melalui email: *bayuaslamaa@gmail.com*